E. CESÀRO

Remarques sur la théorie des roulettes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 209-230

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__209_0>

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ROULETTES;

PAR M. E. CESARO.

1. Nous nous proposons de montrer comment les principes fondamentaux de la Géométrie intrinsèque conduisent par une voie facile aux résultats, connus, de la théorie des roulettes. Certes, ces résultats peuvent être obtenus avec plus de simplicité et d'élégance par des considérations géométriques ou cinématiques, mais celles-ci n'ont pas le caractère d'uniformité analytique qui distingue les méthodes intrinsèques et les rend extrêmement propres aux recherches de Géométrie infinitésimale. Aussi nous garderons-nous parfois de proposer les nouveaux procédés au point de vue de l'exposition didactique, mais nous ne cesserons jamais de les recommander comme constituant une puissante méthode d'investigation.

2. Considérons d'abord, dans un plan, une ligne (M_1) roulant, sans glisser, sur la ligne (M_0). Soit M le point de contact des deux lignes, et prenons pour axes (mobiles) la tangente et la normale à ces lignes, en M. Soient x et y les coordonnées d'un point P, solidaire avec (M_1), entraîné par cette ligne dans le mouvement. Pour exprimer que P est fixe dans le plan de (M_1), on doit écrire

$$\frac{dx}{ds_1} = \frac{y-\rho_1}{\rho_1}, \qquad \frac{dy}{ds_1} = -\frac{x}{\rho_1}. \tag{1}$$

D'autre part, les variations absolues de x et y, dans le plan fixe, sont données par les équations

$$(2)\qquad \frac{\delta x}{ds_0} = \frac{dx}{ds_0} - \frac{y-\rho_0}{\rho_0}, \qquad \frac{\delta y}{ds_0} = \frac{dy}{ds_0} + \frac{x}{\rho_0}.$$

Du reste, $ds_0 = ds_1$; conséquemment, si l'on pose

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0},$$

les formules (2) deviennent, en vertu de (1),

$$(3)\qquad \frac{\delta x}{ds_0} = \frac{y}{R}, \qquad \frac{\delta y}{ds_0} = -\frac{x}{R}.$$

3. Les égalités (3), divisées membre à membre, nous disent que la normale à (P), en P, passe par M. Élevées au carré et additionnées, elles nous donnent le rapport de la vitesse de P à celle de M,

$$(4)\qquad \frac{ds}{ds_0} = \frac{u}{R},$$

u étant la distance MP. On a donc

$$(5)\qquad s = \int \frac{u\, ds_1}{R}.$$

4. Les cosinus directeurs de la tangente à (P), en P, sont

$$\lambda = \frac{y}{u}, \qquad \mu = -\frac{x}{u},$$

et l'on a, en vertu de (1),

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{x}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{\rho_1}\right), \qquad \frac{d\mu}{ds_1} = \frac{y}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Les formules générales

$$(6)\qquad \frac{\delta\lambda}{ds_0} = \frac{d\lambda}{ds_0} - \frac{\mu}{\rho_0}, \qquad \frac{\delta\mu}{ds_0} = \frac{d\mu}{ds_0} + \frac{\lambda}{\rho_0}$$

deviennent donc

$$\frac{\delta\lambda}{ds_0} = \frac{x}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{R}\right), \qquad \frac{\delta\mu}{ds_0} = \frac{y}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{R}\right).$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient, en tenant compte de (4),

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{Ry}{u^3}.$$

Les formules (5) et (7) conduisent, par des éliminations convenables, à une relation entre ρ et s, qui est l'équation intrinsèque de la roulette (P).

5. Si, dans (7), on égale à zéro le second membre, on obtient l'équation

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - Ry = 0,$$

représentant le lieu des points P, qui marquent des inflexions sur les trajectoires correspondantes, à l'instant considéré. On parvient ainsi à la notion du *cercle des inflexions*. Le point H, diamétralement opposé à M, sur ce cercle, est le centre instantané géométrique du second ordre, point de concours des tangentes aux trajectoires, en leurs points d'inflexion.

6. Lorsque (M_0) est une droite, on a $\rho_0 = \infty$, $R = \rho_1$, et les formules (5), (7) deviennent

$$(9) \qquad s = \int \frac{u\, ds_1}{\rho_1}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{\rho_1 y}{u^3}.$$

Ces égalités ont une grande analogie avec les formules relatives aux podaires. On sait, en effet, que les coordonnées intrinsèques de la podaire de (M_1), par rapport à P, sont données par les équations

$$s^{(0)} = \int \frac{u\, ds_1}{\rho_1}, \qquad \frac{1}{\rho^{(0)}} = \frac{2}{u} - \frac{\rho_1 y}{u^3}.$$

Par comparaison avec (9), on obtient

$$(10) \qquad s = s^{(0)}, \qquad \frac{1}{\rho^{(0)}} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u}.$$

La première de ces égalités nous dit que tout arc de roulette, à base rectiligne, est égal à l'arc correspondant de la podaire de la courbe génératrice, par rapport au point décrivant. Ce théorème est dû à Steiner. La seconde formule (10) nous dit que, dans le roulement de la podaire de (M_1), par rapport à P, sur (P), le diamètre du cercle des inflexions est égal à u. D'ailleurs, il est presque évident que, relativement à la podaire roulante, les coordonnées de P sont

$$u^{(0)} = y, \qquad y^{(0)} = \frac{y^2}{u}.$$

Par substitution dans le second membre de (7), on trouve un résultat nul. Conséquemment, si, dans le roulement d'une courbe (M_1) sur une droite, un point P, fixe dans le plan de (M_1), décrit la courbe (P), la podaire de (M_1) par rapport à P, en roulant sur (P), fera décrire à P une droite. Ce théorème est dû à M. Habich [1].

7. Plus généralement, si $\rho_0 = m\rho_1$, on a

$$s = \frac{m-1}{m} s^{(0)}, \qquad \frac{m-1}{\rho} = \frac{m}{\rho^{(0)}} - \frac{m+1}{u}.$$

---

[1] *Mathesis*, p. 145; 1882.

Il y a donc proportionnalité entre l'arc de la roulette et celui de sa podaire. En particulier, pour $m = -1$,

$$s = 2s^{(0)}, \qquad \rho = 2\rho^{(0)}.$$

Par suite, si une courbe roule sur une courbe égale et opposée, la trajectoire de tout point du plan de la première courbe est semblable à la podaire de cette courbe par rapport au point décrivant. Il faut, bien entendu, que les deux courbes soient symétriquement placées, à l'origine du mouvement, par rapport à la tangente commune. Elles resteront alors constamment symétriques, et la propriété énoncée devient évidente.

8. Lorsque le point P n'est plus fixe dans le plan de (M_1), il faut connaître avant tout la trajectoire qu'il décrit dans le plan mobile et la position qu'il y occupe à chaque instant. Il suffit de se donner, dans ce but, le rayon de courbure ρ' de la trajectoire et le rapport k de la vitesse de P à celle de M : ces deux quantités peuvent être considérées comme des fonctions connues de s_1. Nous nous bornerons à examiner le cas très simple où la trajectoire de P, dans le plan mobile, rencontre orthogonalement les rayons MP. Soient M', P' les nouvelles positions de M, P, après un mouvement infinitésimal, de sorte que

$$\text{MM}' = ds_1, \qquad \text{PP}' = k\, ds_1.$$

Les droites MP, M'P' concourent au centre de courbure de la trajectoire de P, dans le plan de (M_1) : les arcs PP' et la projection de MM' sur la perpendiculaire à MP, élevée par M, sont interceptés par les côtés du même angle au centre sur deux circonférences, dont les rayons sont ρ' et $u - \rho'$. On en déduit

$$\frac{k}{y} = \frac{1}{u - \rho'} - \frac{1}{u}. \tag{11}$$

9. Cela posé, nous ne pouvons plus nous servir des formules (1) qui ont été obtenues en supposant $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, tandis que, dans le cas actuel, nous avons

$$\frac{\delta x}{ds_1} = -\frac{ky}{u}, \qquad \frac{\delta y}{ds_1} = \frac{kx}{u}.$$

Par suite, au lieu de (1),

$$(12) \qquad \frac{dx}{ds_1} = \frac{y - \rho_1}{\rho_1} - \frac{ky}{u}, \qquad \frac{dy}{ds_1} = -\frac{x}{\rho_1} + \frac{kx}{u};$$

puis, au lieu de (3),

$$\frac{\delta x}{ds_0} = \frac{y}{R} - \frac{ky}{u}, \qquad \frac{\delta y}{ds_0} = -\frac{x}{R} + \frac{kx}{u}.$$

A la formule (4) on doit donc substituer

$$(13) \qquad \frac{ds}{ds_0} = \frac{u}{R} - k.$$

Enfin les expressions de λ et μ restent les mêmes; mais on a, en vertu de (12),

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{x}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{\rho_1} + k\right), \qquad \frac{d\mu}{ds_1} = \frac{y}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{\rho_1} + k\right);$$

puis, les formules (6) deviennent

$$\frac{\delta\lambda}{ds_0} = \frac{x}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{R} + k\right), \qquad \frac{\delta\mu}{ds_0} = \frac{y}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{R} + k\right),$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (13),

$$(14) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{Ry}{u^2(u - kR)}.$$

C'est la généralisation de la formule (7), qui répond à l'hypothèse $k = 0$.

10. Si l'on tient compte de (11), on peut mettre la relation (14) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{u-\rho'} - \frac{1}{u-\rho} = \frac{u}{\mathrm{R}y}. \tag{15}$$

C'est la *formule de Savary*. Soient C et C' les centres de courbure des trajectoires de P dans le plan fixe et dans le plan mobile. La formule (15) nous dit que les perpendiculaires à la tangente et à MP, menées par C et M respectivement, concourent sur HC', ce qui permet de déterminer C, connaissant C'. Si l'on ne veut pas se servir du point H, on doit remarquer que les droites CC_0 et $C'C_1$ concourent sur la perpendiculaire à MP, élevée par M (1).

11. Il est clair qu'une ligne quelconque, fixe dans le plan de (M_1), et représentée par l'équation

$$f(x, y) = 0, \tag{16}$$

touche son enveloppe aux points qu'elle a en commun avec la ligne

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{ds_0} = 0.$$

En vertu de (3), la dernière égalité devient

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{17}$$

Conséquemment, la ligne considérée touche son enveloppe aux pieds des perpendiculaires qu'on lui abaisse de M. Cette enveloppe est donc une trajectoire orthogonale des rayons MP, et, par suite, les résultats des trois derniers paragraphes lui sont applicables. Conséquem-

(1) *Voir*, dans les *Nouvelles Annales*, les théorèmes de Cinématique de MM. Habich et Dewulf (1882, p. 458; 1883, p. 297).

ment, une fois qu'on aura déterminé, au moyen des équations (16) et (17), les coordonnées x, y des points de contact, on obtiendra les coordonnées intrinsèques de l'enveloppe en appliquant à ces points les formules (13) et (15).

12. Soit une droite D, fixe dans le plan mobile. Elle touche son enveloppe au point P, projection de M. A cause de (11) et de $\rho' = \infty$, les formules (13) et (15) donnent

$$(18) \qquad s = \int \left(\frac{u}{R} + \frac{y}{u} \right) ds_1, \qquad \rho = u + \frac{Ry}{u}.$$

Nous voyons, par la seconde formule, que le symétrique du cercle des inflexions, par rapport à la tangente, est le lieu des points de rebroussement que les enveloppes des droites du plan mobile présentent à un instant donné : c'est le *cercle des rebroussements*. Lorsque D vient à toucher son enveloppe en un point de rebroussement, elle contient le symétrique de H par rapport à M.

13. La première formule (18) donne lieu à une remarque intéressante. Après un roulement quelconque, projetons sur D l'arc de courbe roulante, qui a subi le contact de la ligne fixe. Soit l la longueur de cette projection. Lorsque la ligne fixe est droite, l'arc enveloppé par D est, d'après (18),

$$\sigma = l + \int \frac{u\, ds_1}{\rho_1}.$$

Si la courbe (M_0) est telle que l'on ait, en chaque point, $\rho_0 = m\rho_1$, on a aussi, en vertu de (18),

$$s = l + \frac{m-1}{m} \int \frac{u\, ds_1}{\rho_1}.$$

Donc

$$ms - (m - 1)\sigma = l.$$

Ce théorème est susceptible d'utiles applications; nous ne nous y arrêterons pas.

14. Étudions le roulement d'une conique sur une droite. Si l'on pose, pour abréger,

$$p = \sqrt{\left(\frac{a\rho_1}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}, \qquad q = \sqrt{1 - \left(\frac{b\rho_1}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

de sorte que $a^2 q^2 + b^2 p^2 = c^2$, on a (¹)

$$\rho_1 = \frac{a^2 b^2}{c^3}(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{d\rho_1}{ds_1} = 3pq,$$

et les formules (9) deviennent

$$(19) \quad s = \int \frac{u(p\,dp + q\,dq)}{pq(p^2 + q^2)}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{a^2 b^2 y}{c^3 u^3}(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans chaque cas particulier, on exprimera p et q en fonction de u et les relations (19) donneront ensuite, par élimination de u, l'équation intrinsèque de la roulette cherchée.

15. On sait que les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{pqa}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et l'on en déduit

$$qa = \sqrt{u^2 - b^2}, \qquad pb = \sqrt{a^2 - u^2}.$$

(¹) Voir notre précédent Article *Sur deux classes de lignes planes*.

Les équations (19) deviennent

$$s = ab \int \frac{u^2\, du}{(a^2 + b^2 - u^2)\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{u} - \frac{a^2 + b^2}{u^3}.$$

En particulier, pour l'hyperbole équilatère,

$$s = a^2 \int \frac{du}{\sqrt{u^4 - a^4}}, \qquad \rho = \frac{u}{2}.$$

La dernière égalité nous dit que la roulette cherchée n'est autre que la ligne de Ribaucour, d'indice 3. Du reste, l'élimination de u conduit à l'équation intrinsèque

$$s = 2 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{2a}\right)^4 - 1}},$$

analogue à celle de la lemniscate de Bernoulli.

16. Les abscisses des foyers sont

$$\frac{pa(1 + q)}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad -\frac{pa(1 - q)}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et les ordonnées

$$\frac{a(1 + q)}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad \frac{a(1 - q)}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

On a donc $u = a(1 \pm q)$, et, par suite,

$$\pm qa = u - a, \qquad \pm pb = \sqrt{a^2 e^2 - (u - a)^2},$$

où e représente l'excentricité. Les formules (19) deviennent

$$(20) \qquad s = ab \int \frac{du}{(2a - u)\sqrt{a^2 e^2 - (u - a)^2}}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{u}.$$

De la dernière égalité on déduit, presque immédiatement, que ces courbes sont les méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Ce théorème est dû à Delaunay ([1]). L'élimination de u entre les égalités (20) nous donne

$$s = ab \int \frac{d\rho}{(\rho - 2a)\sqrt{e^2(\rho - a)^2 - a^2}};$$

d'où, en effectuant l'intégration,

$$\frac{e}{a}\rho = e - \cos\frac{s}{a} + \frac{\sin^2\frac{s}{a}}{e - \cos\frac{s}{a}}. \tag{21}$$

Telle est l'équation intrinsèque des courbes de Delaunay. Si la conique est une parabole, de paramètre 2α, on pose $a(1 - e) = \alpha$, et l'on fait tendre e vers l'unité, dans (21). Il vient

$$\rho = \alpha + \frac{s^2}{\alpha},$$

équation d'une chaînette. C'est pourquoi M. Lindelöf appelle ([2]) *chaînettes* toutes les courbes de Delaunay, en distinguant les *chaînettes elliptiques* des *chaînettes hyperboliques*, suivant la nature de la conique génératrice. En tournant autour de leur base, ces roulettes engendrent les remarquables surfaces appelées *onduloïde, caténoïde, nodoïde* par M. Plateau.

17. Les parallèles aux courbes de Delaunay sont re-

([1]) *Journal de Liouville*, p. 309; 1841.

([2]) *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (*Mémoires de la Société des Sciences de Finlande*, 1863).

présentées par l'équation

$$s = ab \int \frac{\rho\, d\rho}{(\rho + h)(\rho + h - 2a)\sqrt{e^2(\rho + h - a)^2 - a^2}}.$$

Or, si l'on fait $h = 2a$, on retrouve l'équation (21). Chaque courbe de Delaunay jouit donc de la propriété d'*être parallèle à une courbe égale*. Le cercle, qui est évidemment doué de cette propriété, est, après tout, une courbe de Delaunay. Pour $h = a$, on trouve que les courbes de Delaunay sont parallèles aux courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$(22) \qquad \rho = a\sqrt{\frac{a^2 + b^2 \tang^2 \frac{s}{a}}{a^2 - b^2}}.$$

Chacune de ces lignes est à égale distance de deux courbes de Delaunay, engendrées par deux foyers, de noms contraires, de deux coniques égales, roulant sur une droite, et se maintenant symétriques par rapport à cette droite. Celle-ci rencontre la courbe médiane sur les normales communes d'inflexion. La démonstration géométrique de ces propriétés est extrêmement simple.

18. On sait qu'une ligne cycloïdale est représen · par une équation de la forme

$$a^2\rho_1^2 + b^2 s_1^2 = a^2 b^2,$$

et que les coordonnées du centre du cercle directeur sont

$$x = \frac{b^2 s_1}{a^2 - b^2}, \qquad y = \frac{a^2 \rho_1}{a^2 - b^2},$$

de sorte que

$$a^2\rho_1^2 = (a^2 - b^2)u^2 - \frac{a^2 b^4}{a^2 - b^2},$$

$$b^2 s_1^2 = \frac{a^4 b^2}{a^2 - b^2} - (a^2 - b^2)u^2.$$

Les formules (9) donnent

$$s = \frac{a}{b} \int \frac{u^2\, du}{\sqrt{\left[u^2 - \left(\frac{ab^2}{a^2 - b^2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{a^2 b}{a^2 - b^2}\right)^2 - u^2\right]}},$$

$$\rho = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab^2}\right)^2 u^3;$$

puis, par élimination de u,

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left[\left(\frac{a^2 - b^2}{ab^2}\rho\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2 - b^2}{ab^2}\rho\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}.$$

C'est l'équation d'une conique ayant les axes proportionnels à a et b, et le paramètre égal au rayon du cercle directeur.

19. Si l'on veut déterminer (M_0) de manière que (P) soit une droite, il faut satisfaire à (8) avec les coordonnées de P. Les coordonnées intrinsèques de (M_0) seront donc

$$(23) \qquad s_0 = s_1, \qquad \rho_0 = \frac{u^2 \rho_1}{u^2 - \rho_1 y}.$$

Supposons, par exemple, que (M_1) soit un cercle de rayon a, et que le point P, fixe dans le plan du cercle, soit à la distance ae du centre. Il est évident que

$$x = - ae \sin \frac{s_1}{a}, \qquad y = a\left(1 - e \cos \frac{s_1}{a}\right).$$

Par substitution dans (23) et élimination de s_1, on est reconduit à l'équation (21). On parvient ainsi au théorème suivant, dû à M. Habich : *La courbe sur laquelle il faut faire rouler un cercle, pour qu'un point de son plan décrive une droite, est une courbe de Delau-*

nay [1]. Celle-ci s'obtient en faisant rouler sur une droite une conique concentrique au cercle, et admettant pour foyer le point donné. Cette proposition a été déduite, par M. Habich, du théorème démontré au n° 6 : il suffit d'observer, à cet effet, que la podaire d'une conique, par rapport à un foyer, est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. Il est presque superflu d'ajouter que la circonférence est enveloppée dans son mouvement par deux courbes de Delaunay, égales, et que la trajectoire de son centre est représentée par l'équation (22).

20. Rappelons-nous que l'équation

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^m - 1}}$$

représente une *spirale sinusoïde*, d'indice n, ou une *ligne de Ribaucour*, d'indice n, suivant que l'on attribue à m l'une ou l'autre des valeurs

$$\frac{2n}{n-1}, \qquad 2\frac{n+1}{n-1}.$$

Cela étant, faisons rouler une spirale sinusoïde sur une droite. A cause de la propriété fondamentale des spirales sinusoïdes, les coordonnées du pôle satisfont à l'égalité

$$(24) \qquad u^2 = (n+1)\rho_1 y,$$

et, par suite, la seconde équation (9) devient

$$\rho = \frac{n+1}{n} u.$$

---

(1) *Mathesis*, p. 103; 1886.

Le rayon de courbure de la trajectoire du pôle est donc proportionnel au segment de normale compris entre la roulette et sa base. Cette propriété caractérise les lignes de Ribaucour, dont l'indice ν est lié à n par l'égalité

$$\frac{2}{\nu+1} = \frac{n+1}{n}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+1}.$$

Conséquemment, *si une spirale sinusoïde, d'indice n, roule sur une droite, son pôle décrit une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n-1}{n+1}$ (¹). Ce théorème parait dû à M. O. Bonnet. Pour en faire quelques applications, rappelons quelles sont les principales lignes appartenant aux deux classes dont il s'agit ici :

n.	Spirales sinusoïdes.	Lignes de Ribaucour.
∞	point	point
-1	droite	droite
1	cercle	cercle
0	spirale logarithmique	cycloïde
-2	hyperbole équilatère	parabole
2	lemniscate	....
$-\frac{1}{2}$	parabole	....
$\frac{1}{2}$	cardioïde	....
-3	....	chaînette
$-\frac{1}{3}$	....	(parallèle à une hypocycloïde)
$\frac{1}{3}$	(parallèle à une épicycloïde)	....

Cela posé, si l'on fait successivement $n = 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, on retrouve les théorèmes connus : 1° si une circonférence roule sur une droite, chacun de ses points décrit une cycloïde ; 2° si une spirale logarithmique roule sur une droite, son pôle parcourt une droite; 3° si une parabole roule sur une droite, son foyer décrit une chaî-

(¹) *Étude sur les elassoïdes,* par M. Ribaucour (p. 158).

nette; 4° si une cardioïde roule sur une droite, son point de rebroussement se meut parallèlement à une hypocycloïde.

21. Cherchons la courbe sur laquelle il faut faire rouler une spirale sinusoïde pour que son pôle décrive une droite. Il faut satisfaire à (8), et, en même temps, l'équation (24) doit être vérifiée. La comparaison donne

$$R = (n+1)\rho_1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \frac{n}{n+1}\rho_0.$$

Donc, si

$$s_1 = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}$$

est l'équation de la ligne donnée, celle de la ligne inconnue sera

$$s_0 = \frac{n}{n-1}\int \frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Or cette équation représente une ligne de Ribaucour, dont l'indice ν est lié par l'égalité

$$\frac{\nu+1}{\nu-1} = \frac{n}{n-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = 2n - 1.$$

Conséquemment, *la ligne sur laquelle il faut faire rouler une spirale sinusoïde, d'indice n, pour que son pôle décrive une droite, est une ligne de Ribaucour, d'indice $2n-1$*. Ajoutons que les deux courbes doivent opposer leurs convexités lorsque n est compris entre o et -1. On démontrerait, tout aussi facilement, que, *si l'on renverse la courbe fixe, le pôle décrit une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{2n-1}{2n+1}$.

22. La première proposition est une conséquence évidente du théorème de M. Habich, démontré au n° 6. Il suffit de remarquer qu'une spirale d'indice n admet pour podaire, par rapport au pôle, une spirale d'indice $\frac{n}{n+1}\cdot$ D'après cela, le théorème du n° 7 nous dit immédiatement que, *si une spirale d'indice n roule sur une spirale égale, opposée, son pôle décrit une spirale d'indice* $\frac{n}{n+1}\cdot$ Cette remarque a été déjà faite par M. Bassani (¹). On démontre aussi que, *si une ligne de Ribaucour, d'indice n, roule sur une ligne égale, sa directrice enveloppe une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n}{n+2}\cdot$

23. Si une ligne de Ribaucour roule sur une droite, sa directrice, qui intercepte sur la normale un segment $\frac{n+1}{2}\rho_1$, touche son enveloppe au pied de la perpendiculaire qu'on lui abaisse de M. Les coordonnées de cette projection satisfont donc à la relation

$$u^2 = \frac{n+1}{2}\rho_1 y, \tag{25}$$

qui, substituée dans la seconde équation (18), donne

$$\rho = \frac{n+3}{n+1}u.$$

Conséquemment, l'enveloppe est une autre ligne de Ribaucour, dont l'indice ν est lié à n par l'égalité

$$\frac{2}{\nu+1} = \frac{n+3}{n+1}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+3}\cdot$$

(¹) *Journal de Battaglini*; 1886.

Ainsi, *lorsqu'une ligne de Ribaucour, d'indice n, roule sur une droite, sa directrice enveloppe une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n-1}{n+3}$ (¹). Par exemple, pour $n = 1, 0, -2, -3$, on trouve que : 1° lorsqu'une circonférence roule sur une droite, chacun de ses diamètres enveloppe une cycloïde; 2° lorsqu'une cycloïde roule sur une droite, l'enveloppe de sa base est parallèle à une hypocycloïde; 3° lorsqu'une parabole roule sur une droite, sa directrice enveloppe une chaînette; 4° lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa directrice passe par un point fixe.

24. Pour généraliser la dernière propriété, cherchons la courbe sur laquelle il faut faire rouler une ligne de Ribaucour, pour que sa directrice contienne un point fixe. Les coordonnées de la projection de M sur la directrice doivent satisfaire à (25), et, en même temps, à l'équation du cercle des rebroussements. Il résulte de la comparaison

$$R = \frac{n+1}{2}\rho_1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \frac{n+3}{n+1}\rho_0.$$

Donc, si

$$s_1 = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}$$

est l'équation de la ligne donnée, celle de la ligne inconnue sera

$$s_0 = \frac{n+3}{n-1}\int \frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

(¹) *Sur une famille de courbes cycloïdales*, par M. E. Dubois (*Nouv. Corr. math.*, p. 159; 1880).

Or cette équation représente une spirale sinusoïde dont l'indice ν est lié à n par l'égalité

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{n+1}{n-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi, *la courbe sur laquelle il faut faire rouler une ligne de Ribaucour, d'indice n, pour que sa directrice pivote autour d'un point fixe, est une spirale sinusoïde, d'indice* $\frac{n+1}{2}$. Pour les valeurs de n, comprises entre -1 et -3, les deux courbes doivent opposer leurs convexités. On démontre en outre que, *si l'on renverse la courbe fixe, la directrice de la courbe mobile enveloppe une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n+1}{n+3}$.

25. On pouvait s'attendre à l'avant-dernier théorème; car, si les courbes génératrices échangent leurs rôles, les cercles des inflexions et des rebroussements en font autant. Dès lors, le centre H, qui, dans le roulement de (M_1) sur (M_0), est le point de concours des tangentes aux points d'inflexion, est également, dans le roulement de (M_0) sur (M_1), le point de concours des tangentes aux points de rebroussement. Or, si le point P décrit une droite D, lorsque (M_1) roule sur (M_0), il est nécessaire que D passe par H, et, par suite, dans le roulement de (M_0) sur (M_1), la droite D, passant par H, devra pivoter autour du point P. Par exemple, si une courbe de Delaunay roule sur un cercle convenablement choisi, sa base enveloppe un point.

26. De même, les théorèmes des n^{os} 21 et 24 nous disent que: 1° lorsqu'une droite roule sur une chaînette, un point de son plan décrit une droite; dans le roulement inverse, la directrice de la chaînette passe par un point fixe; 2° si une cardioïde roule sur une cycloïde, convenablement choisie, son point de rebroussement parcourt la base de la cycloïde; dans le roulement inverse, la base de la cycloïde enveloppe un point; 3° la courbe sur laquelle il faut faire rouler la seconde podaire d'un cercle, par rapport à l'un de ses points, pour que ce point décrive une droite, est parallèle à une hypocycloïde; inversement, etc.; 4° si deux paraboles égales, qui se touchent aux sommets en opposant leurs convexités, roulent l'une sur l'autre, le foyer de chaque parabole restera constamment sur la directrice de l'autre. Ce dernier théorème se déduit aussi de la remarque faite au n° 7, et l'on peut même affirmer plus généralement que, dans le roulement d'une conique sur une conique égale, les foyers de la conique roulante décrivent des circonférences.

Plus généralement encore, F' et F'' étant les foyers d'une conique roulant sur (M_0), soit F le symétrique de F'' par rapport à la tangente commune $x'x$. Il est clair que F est le foyer d'une conique égale à la première, roulant avec celle-ci sur (M_0). En d'autres termes, les deux coniques roulent l'une sur l'autre, de manière que le point de contact se déplace sur (M_0). L'angle $F''Mx$ est égal à chacun des angles FMx, $F'Mx'$, qui sont donc égaux entre eux. Donc M est sur FF'. De plus,

$$FM \pm MF' = MF' + MF'' = 2a.$$

En conséquence, les trajectoires (F) et (F') sont parallèles et leur distance est égale au grand axe des coniques. En particulier, si l'on fixe une des coniques, (F') se réduit à un point, et (F) est une circonférence de rayon $2a$.

27. La démonstration géométrique des théorèmes précédents ne présente aucune difficulté. Soient C_1 et C les centres de courbure de la spirale, roulant sur une droite, et de la trajectoire du pôle P. En vertu de la construction de Savary, la droite PC_1 passe par le point de rencontre Q des perpendiculaires à la base et à MP, menées respectivement par C et M. Soit N la projection de C_1 sur MP. On a, par la définition des spirales sinusoïdes, d'indice n,

$$n = \frac{PN}{NM} = \frac{PC_1}{C_1Q} = \frac{PM}{MC},$$

d'où

$$\frac{PM}{PC} = \frac{n}{n+1} = \frac{\nu+1}{2}, \qquad \text{si} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+1},$$

ce qui suffit pour définir une ligne de Ribaucour, d'indice ν. De même, si une ligne de Ribaucour roule sur une droite, le centre de courbure de l'enveloppe de la directrice s'obtient en projetant le point C_2, symétrique de C_1, par rapport à M, sur la perpendiculaire à la directrice, passant par M. Soient P la projection de M sur la directrice, et Q le point où celle-ci rencontre la normale. On a, par définition,

$$\frac{n+1}{2} = \frac{QM}{MC_2} = \frac{PM}{MC}.$$

d'où

$$\frac{PM}{PC} = \frac{n+1}{n+3} = \frac{\nu+1}{2}, \qquad \text{si} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+3}.$$

On démontrerait de même les autres théorèmes.

Il faudra observer que, si (M_1) entraîne un point décrivant une droite D, ou une droite D′ pivotant autour d'un point, D et D′ contiennent respectivement H et le symétrique de ce point par rapport à M.

28. Tous ces théorèmes nous indiquent des modes de génération pour quelques courbes, dont nous ne connaissons, jusqu'à présent, que l'équation intrinsèque. Ainsi, dans un précédent article, nous avons rencontré les lignes de Ribaucour, aux indices 3 et — 5, respectivement représentées par les équations

$$s = 2\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - 1}}, \qquad s = \frac{2}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

qui ont une si grande analogie avec les équations de la lemniscate et de l'hyperbole équilatère

$$s = 3\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - 1}}, \qquad s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Maintenant nous pouvons dire, grâce aux théorèmes qui précèdent, que la première courbe est le lieu du centre d'une hyperbole équilatère roulant sur une droite. Elle est aussi la courbe sur laquelle doit rouler une lemniscate, pour que son point double reste sur une droite. C'est encore l'enveloppe de la directrice d'une chaînette, roulant à l'extérieur d'une chaînette égale. De même, la seconde équation représente la courbe sur laquelle on doit faire rouler une hyperbole équilatère, pour que son centre décrive une droite. Inversement, lorsque les deux courbes considérées roulent respectivement sur une lemniscate et une hyperbole équilatère, convenablement choisies, leurs directrices pivotent autour de deux points fixes.