NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 200-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__200_0>

SUR LES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES D'UNE VARIABLE;

Par M. Ch. BIEHLER.

On sait que, si une série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances d'une variable x, est convergente pour une valeur de x dont le module est R, elle est convergente pour toute valeur de x dont le module est moindre que R; elle représente, pour toutes ces valeurs de la variable, une fonction continue de x. Cette propriété subsiste en conséquence pour toute valeur de x représentée par un point du plan situé dans l'intérieur d'un cercle d'un certain rayon R', désigné sous le nom de *cercle de convergence*. Si l'on prend les dérivées des termes de la série (1) supposée convergente dans le cercle de rayon R', on obtient une nouvelle série

$$(2) \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_2 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

convergente pour toute valeur de la variable située dans l'intérieur de ce cercle. Remarquons, en outre, que, pour toutes ces valeurs, les séries formées par les modules des termes des séries (1) et (2), à savoir

$$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots + \alpha_n r^n + \ldots,$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 r + 3\alpha_3 r^2 + \ldots + n\alpha_n r^{n-1} + \ldots,$$

où α_μ désigne le module de a_μ, sont convergentes.

Nous allons donner, dans ce qui suit, une démonstration simple d'une propriété connue, mais importante, de ces séries, à savoir : la série (2) représente une fonction qui est la dérivée de la fonction représentée par la première, pour toute valeur de la variable située dans l'intérieur du cercle de convergence.

Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

et soit $F_n(x)$ le polynôme de degré n,

$$F_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

soit $R_n(x)$ la somme de tous les termes qui suivent le $(n+1)^{\text{ième}}$ dans la série (1).

On aura

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x);$$

en désignant par $x + h$ une valeur de la variable représentée également par un point situé dans l'intérieur du cercle de convergence, on aura aussi

$$F(x+h) = F_n(x+h) + R_n(x+h);$$

d'où

$$\begin{aligned} &F(x+h) - F(x) \\ &\quad = F_n(x+h) - F_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &\quad = \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} + \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}; \end{aligned}$$

lorsque h tend vers zéro, $\dfrac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h}$ a pour limite la dérivée du polynôme $F_n(x)$, soit $F'_n(x)$,

$$F'_n(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Considérons la seconde partie, $\dfrac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}$; on peut écrire

$$\begin{aligned} & \mathrm{R}_n(x+h)-\mathrm{R}_n(x) \\ & \quad = a_{n+1}[(x+h)^{n+1}-x^{n+1}]+a_{n+2}[(x+h)^{n+2}-x^{n+2}]+\ldots, \end{aligned}$$

car $\mathrm{R}_n(x+h)$ et $\mathrm{R}_n(x)$ sont des séries convergentes.

Mais

$$(x+h)^{n+1}-x^{n+1}=h[(x+h)^n+(x+h)^{n-1}x+\ldots+x^n],$$

et de même pour les autres termes ; on pourra donc poser

$$\mathrm{R}_n(x+h)-\mathrm{R}_n(x)=h\,\Phi_n(x,h),$$

où $\Phi_n(x,h)$ est une fonction entière.

Nous allons chercher une limite du module de la fonction $\Phi_n(x,h)$. Soit ρ le plus grand des modules des quantités $x+h$ et x, on aura

$$\operatorname{mod}[(x+h)^n+(x+h)^{n-1}x+\ldots-x^n]<(n+1)\rho^n:$$

par suite,

$$\operatorname{mod}\Phi(x,h)<(n-1)\alpha_{n+1}\rho^n+(n+2)\alpha_{n+2}\rho^{n+1}+\ldots.$$

La série

$$\alpha_1+2\alpha_2\rho+3\alpha_3\rho^2-\ldots+n\alpha_n\rho^{n-1}+(n+1)\alpha_{n+1}\rho^{n+1}+\ldots$$

étant convergente, on peut trouver une valeur de n finie, telle que

$$(n+1)\alpha_{n+1}\rho^n+(n+2)\alpha_{n+2}\rho^{n+1}+\ldots$$

soit inférieur à un nombre donné ε; par suite, en désignant par ε_n une quantité aussi petite que l'on voudra, on aura pour toute valeur de h satisfaisant à la condition que $x+h$ soit dans l'intérieur du cercle de convergence,

$$\frac{\mathrm{R}_n(x+h)-\mathrm{R}_n(x)}{h}=\varepsilon_n.$$

D'autre part, on peut trouver une valeur de h assez petite pour que

$$\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h}$$

ne diffère de $F'_n(x)$ que d'une quantité η_n aussi petite qu'on voudra; $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ pourra donc s'écrire

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'_n(x) + \varepsilon_n + \eta_n.$$

Mais la série

$$F_1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

est convergente; on peut donc prendre n assez grand pour que $F_1(x)$ ne diffère de $F'_n(x)$ que d'une quantité ζ_n aussi petite que l'on voudra,

$$F'_n(x) = F_1(x) + \zeta_n,$$

par suite,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F_1(x) + \varepsilon_n + \eta_n + \zeta_n.$$

Lorsque h tend vers zéro, le premier membre a pour limite la dérivée de la fonction $F(x)$. On voit que cette limite existe et est $F(x)$. Il ne saurait y avoir en effet de différence entre cette limite et $F_1(x)$; car, si l'on supposait qu'il en existe une finie, quelque petite qu'on la suppose, ce qui précède montre qu'on peut trouver un nombre n, tel que la différence entre $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ soit plus petite que la différence assignée; la fonction $F(x)$ a donc bien pour dérivée $F_1(x)$.
