NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉTIENNE POMEY

Sur l'intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 194-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__194_1>

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES HOMOFOCALES;

Par M. Étienne POMEY.

L'équation différentielle des coniques, rapportées à deux axes de coordonnées rectangulaires et ayant pour foyers F et F′ situés sur Ox de part et d'autre de l'origine à la distance c de ce point, est

$$(1) \qquad xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 + c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Pour intégrer cette équation, M. Jordan (*Cours d'Analyse*, t. III, p. 40) la ramène à une équation de Clairaut par la substitution $x^2 = u, y^2 = v$. Mais on peut aussi l'intégrer directement par la méthode suivante, qui repose sur quelques transformations simples qu'on peut lui faire subir, de façon à la ramener à la forme $du + dv = 0$, d'où résulte la solution $u + v = \text{const.}$

L'équation (1) peut, en effet, s'écrire successivement

$$(2)\quad xy\,dy^2 + x^2\,dx\,dy - y^2\,dx\,dy - c^2\,dx\,dy - xy\,dx^2 = 0,$$

$$(3)\quad x\,dy(y\,dy + x\,dx) - y\,dx(y\,dy + x\,dx) = c^2\,dx\,dy,$$

$$(4)\quad (x\,dy - y\,dx)(y\,dy + x\,dx) = c^2\,dx\,dy.$$

On voit donc que, si l'on pose, pour abréger,

$$x\,dy - y\,dx = m, \qquad y\,dy + x\,dx = n,$$
$$c\,dx = p, \qquad c\,dy = q,$$

l'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{m}{q} = \frac{p}{n},$$

d'où l'on tire

$$(5)\quad \frac{m+q}{m-q} = \frac{p+n}{p-n} = \pm\frac{\sqrt{(m+q)^2 + (p+{}^2n)}}{\sqrt{(m-q)^2 + (p-n)^2}}.$$

Or on a

$$(m+q)^2 + (p+n)^2 = [(x+c)^2 + y^2](dx^2 + dy^2),$$
$$(m-q)^2 + (p-n)^2 = [(x-c)^2 + y^2](dx^2 + dy^2),$$
$$p + n = (x+c)\,dx + y\,dy,$$
$$p - n = (x-c)\,dx + y\,dy,$$

et par suite, d'après (5),

$$\frac{(x-c)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \pm \frac{(x-c)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = 0$$

Chacune des deux fractions figurant dans cette équation est la demi-différentielle de son dénominateur. On a donc, en intégrant et désignant par a une constante arbitraire,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

équation qui représente toutes les ellipses et hyperboles ayant pour foyers les points F et F'.