NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉTIENNE POMEY

Sur quelques intégrales remarquables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 191-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__191_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES INTÉGRALES REMARQUABLES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY.

On lit, dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Ch. Hermite, le passage suivant qui termine le Chapitre relatif à l'intégration par parties (p. 260) :

« Tels sont donc jusqu'ici les divers types de fonctions pour lesquels on possède une méthode sûre d'intégration sous forme finie explicite. Bien d'autres, nous devons le dire, ne rentrent point dans ces méthodes; ainsi, par exemple, en posant

$$u = x\sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x\cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2\,dx}{u^2} = \frac{v}{u},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

$$\int \frac{b\,x^2\,dx}{(au - bv)^2} = -\frac{u}{au - bv}.$$

» Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a\,dx}{[a - (ax - b)\operatorname{tang} x]^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{a - (ax - b)\operatorname{tang} x}$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation. »

Je me propose de démontrer dans cette Note que le procédé d'intégration par parties, *joint à l'emploi de* *substitutions très simples,* suffit pour obtenir la valeur des quatre intégrales précédentes. Je désignerai ces intégrales respectivement par A, B, C, D et je négligerai d'écrire les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

I. La différentiation de l'équation

$$u = x\sin x + \cos x$$

donne

$$x\cos x\,dx = du$$

et, par suite,

$$\mathrm{A} = \int \frac{x}{\cos x}\,\frac{du}{u^2} = -\int \frac{x}{\cos x}\,d\left(\frac{1}{u}\right),$$

ou, en intégrant par parties,

$$\mathrm{A} = -\frac{x}{u\cos x} + \int \frac{1}{u}\,d\left(\frac{x}{\cos x}\right).$$

Or on a

$$d\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{u}{\cos^2 x}\,dx,$$

d'où, par conséquent.

$$\mathrm{A} = -\frac{x}{u\cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{u\cos x} + \operatorname{tang} x = \frac{v}{u}.$$

II. De même on trouve, par un calcul analogue au précédent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \int \frac{x}{\sin x}\,\frac{dv}{v^2} = -\int \frac{x}{\sin x}\,d\left(\frac{1}{v}\right) \\
&= -\frac{x}{v\sin x} + \int \frac{1}{v}\,d\left(\frac{x}{\sin x}\right) \\
&= -\frac{x}{v\sin x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{v\sin x} - \cot x = -\frac{u}{v}.
\end{aligned}$$

III. Pour calculer C, posons $au + bv = t$. Il en résulte

$$a\,du + b\,dv = x(a\cos x + b\sin x)\,dx = dt,$$

et, par suite,

$$C = \int \frac{b x^2\, dx}{t^2} = \int \frac{b x}{a \cos x + b \sin x} \frac{dt}{t^2}$$
$$= -\int \frac{b x}{a \cos x + b \sin x} d\left(\frac{1}{t}\right),$$

ou, en intégrant par parties,

$$C = -\frac{b x}{(a \cos x + b \sin x) t} + \int \frac{1}{t} d\left(\frac{b x}{a \cos x + b \sin x}\right).$$

Cette dernière intégrale se réduit aisément à

$$\int \frac{b\, dx}{(a \cos x + b \sin x)^2},$$

pour laquelle les méthodes usuelles conduisent à la valeur

$$-\frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}.$$

Il en résulte

$$C = -\frac{b x}{(a \cos x + b \sin x) t} - \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}$$
$$= -\frac{u}{t} = -\frac{u}{a u + b v}.$$

On démontrerait de même la formule

$$\int \frac{a x^2\, dx}{(a u + b v)^2} = \frac{v}{a u + b v}.$$

IV. Enfin, en ce qui concerne l'intégrale D, nous l'écrirons d'abord, pour la simplicité des calculs, sous la forme

$$\int \frac{a \cos^2 x\, dx}{[a \cos x + (a x + b) \sin x]^2}.$$

Posant alors

$$a \cos x + (a x + b) \sin x = z,$$

on a

$$(ax+b)\cos x\,dx = dz$$

et, par suite,

$$D = \int \frac{a\cos x}{ax+b}\,\frac{dz}{z^2} = -\int \frac{a\cos x}{ax+b}\,d\left(\frac{1}{z}\right),$$

ou, en intégrant par parties,

$$D = -\int \frac{a\cos x}{(ax+b)z} + \int \frac{1}{z}\,d\left(\frac{a\cos x}{ax+b}\right).$$

La dernière intégrale se réduit aisément à

$$\int \frac{-a\,dx}{(ax+b)^2},$$

dont la valeur est

$$\frac{1}{ax+b}.$$

Il en résulte

$$D = -\frac{a\cos x}{(ax+b)z} + \frac{1}{ax+b} = \frac{\tang x}{a+(ax+b)\tang x}.$$