NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur deux classes remarquables de lignes planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 171-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__171_1>

SUR DEUX CLASSES REMARQUABLES DE LIGNES PLANES;

PAR M. E. CESARO.

1. Nous allons étudier les courbes planes douées d'un *pôle* tel, que *le deuxième rayon de courbure soit partagé dans un rapport constant avec le rayon vecteur*. Soient O le pôle, α et β ses coordonnées par rapport à la tangente et à la normale à la ligne (M), au point M. On sait que les dérivées de α et β, par rapport à l'arc de (M), sont

$$(1) \qquad \alpha' = \frac{\beta - \rho}{\rho}, \qquad \beta' = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

En coordonnées polaires, ces équations deviennent

$$(2) \qquad u' = -\cos\omega, \qquad \omega' = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\omega}{u}.$$

Supposons que le premier centre de courbure partage dans le rapport constant de $n-1$ à $n+1$ le segment intercepté par OM sur la normale à la développée de (M), à partir du deuxième centre de courbure. Cela s'exprime en écrivant

$$(3) \qquad \rho' = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{\alpha}{\beta},$$

si l'on observe que la longueur du deuxième rayon de courbure est $\rho\rho'$. Or, en vertu de (1) et (2), on peut écrire

$$(4) \qquad uu' = \beta'\rho = -\alpha.$$

Cela étant, les égalités (3) et (4) nous donnent

$$\beta\rho' + \beta'\rho = \frac{2}{n+1} uu';$$

puis, en intégrant,

$$(5) \qquad u^2 - R^2 = (n+1)\beta\rho,$$

pourvu que n soit fini et différent de -1.

2. L'égalité (5) exprime une remarquable propriété de nos lignes. Appelons *cercle directeur* le cercle de rayon R, dont le centre est au pôle. A cause de (5), la polaire de M par rapport à ce cercle a pour équation

$$\alpha x + \beta y = (n+1)\beta\rho.$$

Elle détache donc de la normale un segment $(n+1)\rho$. Conséquemment, *le rayon de courbure, en tout point* M, *est proportionnel au segment de normale compris entre* M *et la polaire de ce point, par rapport au cercle directeur*. Cette propriété nous indique immédiatement, parmi toutes les lignes que nous considérons, deux classes remarquables, caractérisées par leur cercle directeur. Lorsque celui-ci devient une *droite*, on a les *lignes dont le rayon de courbure est proportionnel au segment de normale, intercepté par une droite fixe*. Ces lignes ont été étudiées par MM. Mannheim, Ribaucour, Dubois [1]. Lorsque le cercle directeur se réduit à un *point*, la polaire de M n'est autre que la perpendiculaire à OM, élevée par O. On a donc les courbes jouissant de la pro-

---

[1] *Nouvelle correspondance mathematique*, t. VI, p. 158 et 224.

priété suivante : *La projection du centre de courbure sur le rayon vecteur partage celui-ci dans un rapport constant.* Ce sont les courbes appelées *spirales sinusoïdes* par M. Haton de la Goupillière [1].

3. Divisons (4) par (5). Il vient

$$\frac{uu'}{u^2 - R^2} = \frac{1}{n+1}\frac{\beta'}{\beta},$$

d'où

$$(6)\qquad u^2 - R^2 = (n+1)\,c^2\left(\frac{\beta}{c}\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

pourvu que n, différent de zéro et de -1, soit fini. Puis, par substitution dans (5),

$$(7)\qquad \rho = c\left(\frac{\beta}{c}\right)^{-\frac{n-1}{n+1}}.$$

On peut donc écrire, en vertu de (6) et de (7),

$$\beta = c\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{n+1}{n-1}},$$

$$\alpha = c\sqrt{\frac{R^2}{c^2} + (n+1)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{2}{n-1}} - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{-2\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Dès lors, l'intégration de (3) nous donne immédiatement

$$(8)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{R^2}{c^2}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} + (n+1)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Telle est l'*équation intrinsèque* générale de nos lignes.

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1876. Lisez, au sujet de ces courbes, les renseignements bibliographiques fournis par MM. Bassani et Brocard dans le *Journal de Battaglini*, 1886, et dans les *Nouvelles Annales*, même année.

4. La discussion des égalités (6) et (7) conduit aisément à quelques remarques intéressantes. En laissant de côté le cas d'un pôle situé à l'infini, que l'on examinera à part, on voit que, si l'*indice* n est différent de l'unité, en valeur absolue, *la courbe ne peut rencontrer sa directrice circulaire sans inflexion ou rebroussement.* Dans tous les cas, *la rencontre est nécessairement orthogonale.* On peut affirmer, en outre, que : 1° *les courbes dont l'indice est inférieur à* — 1 *ne rencontrent pas leur directrice;* 2° *les courbes dont l'indice est supérieur à l'unité n'ont pas de rebroussement, mais elles peuvent avoir des points d'inflexion, nécessairement distribués sur la circonférence directrice;* 3° *les courbes dont l'indice est, en valeur absolue, une fraction propre, n'ont pas d'inflexion : elles ne peuvent subir de rebroussement ailleurs que sur la directrice.* En particulier, les spirales sinusoïdes, dont l'indice est inférieur à — 1, ne contiennent pas le pôle. Les spirales, dont l'indice est supérieur à — 1, peuvent passer par le pôle, à la condition d'y subir un rebroussement ou une inflexion, suivant que la valeur absolue de l'indice est ou n'est pas une fraction propre. Dans tous les cas, de telles singularités ne peuvent se présenter ailleurs qu'au pôle.

5. Chaque valeur de l'indice sert à définir une *famille* de courbes, qui renferme toujours une *ligne de Ribaucour* et une *spirale sinusoïde.* Pour $n = -2$, la définition même de nos courbes se confond avec la construction donnée par Maclaurin pour obtenir le deuxième centre de courbure d'une conique. La construction de Maclaurin nous dit, en outre, que le *pôle* est ici le centre de la courbe. C'est ce qui résulte, d'ailleurs, de notre article *Sur la courbure des coniques.* Ainsi, l'indice — 2 définit la famille des *coniques*, et l'on peut être

curieux de connaître quels sont, dans cette famille, les représentants des deux classes que nous étudions. Dans ce but, remarquons d'abord que α s'annule et β devient égal à l'un des demi-axes, a ou b, lorsque la normale passe par le centre. L'équation (6) devient alors

$$a^4 - R^2 a^2 + c^4 = 0, \qquad b^4 - R^2 b^2 + c^4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$R^2 = a^2 + b^2, \qquad c^2 = ab. \tag{9}$$

La directrice circulaire d'une conique est donc la circonférence circonscrite au rectangle des tangentes aux sommets. C'est le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à la conique. Elle devient une droite, lorsque le centre s'éloigne à l'infini : la conique est alors une parabole. Par conséquent, *la ligne de Ribaucour, d'indice* -2, *est une parabole*. On rencontre encore cette courbe hors de la famille des coniques, avec l'indice $-\frac{1}{2}$; mais alors elle admet le pôle pour foyer. Pour que R soit nul, il faut que $b = a\sqrt{-1}$, d'où il suit que *la spirale sinusoïde, d'indice* -2, *est une hyperbole équilatère*. Si l'on porte dans (8) les résultats (9), en faisant $n = -2$, on trouve que *l'équation intrinsèque des coniques est*

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}. \tag{10}$$

6. Une famille bien simple est définie par l'indice 1. L'équation (7) nous dit qu'il s'agit d'une famille de *cercles*. D'après cela, une circonférence de cercle peut toujours être considérée comme appartenant à une classe quelconque, suivant la position qu'elle occupe par rapport au pôle. Soient a la distance de son centre au pôle et b son rayon. Nous pouvons prendre, sur la circonférence, un

point tel que l'on ait $\alpha = a$, $\beta = b$: l'équation (5) nous donne alors $R^2 = a^2 - b^2$. La circonférence directrice coupe donc orthogonalement la circonférence donnée. C'est le seul cas où une pareille rencontre puisse avoir lieu sans inflexion ni rebroussement. On peut considérer une circonférence comme une spirale sinusoïde, lorsqu'elle passe par le pôle, et comme une ligne de Ribaucour, lorsque le pôle est à l'infini : dans ce cas la directrice est un diamètre quelconque de la circonférence.

7. Certes, la plus intéressante famille répond à l'indice o. Elle se compose de toutes les courbes jouissant de cette curieuse propriété : *Le centre de courbure, en un point* M, *est à l'intersection de la normale avec la polaire de* M, *par rapport à un cercle invariable*. Nous avons rencontré ces courbes dès nos premiers essais de géométrie intrinsèque ([1]). On ne peut leur appliquer la formule (6), parce que le choix même de la constante a été fait de manière qu'elle cesse d'être *arbitraire* pour $n = 0$. Pour rétablir la généralité des résultats, il faut affecter d'un facteur constant, arbitraire, un membre de (6), et l'on trouve alors une équation de la forme

$$\rho^2 = as^2 + 2bs + c,$$

qui représente, pour $a < -1$, une *hypocycloïde;* pour $a = -1$, une *cycloïde;* pour $-1 < a < 0$, une *épicycloïde;* pour $a = 0$, une *développante de cercle;* pour $a > 0$, deux autres familles de lignes, qui se distinguent par le signe de $b^2 - ac$. Lorsque $b^2 - ac = 0$, on a une *spirale logarithmique*. Le rayon du cercle directeur, réel

---

([1]) *Mathesis*, p. 25; 1887.

ou imaginaire, est

$$R = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{1 + a}.$$

Il est *infini* pour $a = -1$, *nul* pour $b^2 - ac = 0$. Donc *la ligne de Ribaucour d'indice* o *est une cycloïde. La spirale sinusoïde d'indice* o *est une spirale logarithmique.* Il est vrai qu'on rencontre encore une épicycloïde parmi les spirales sinusoïdes : c'est le limaçon de Pascal. Mais cette courbe se présente alors avec l'indice $\frac{1}{2}$, et le pôle est au point de rebroussement de la courbe. La parabole du second degré et le limaçon de Pascal sont les seules courbes susceptibles de deux indices différents. Le cercle et la droite ont une infinité de pôles, et appartiennent, par conséquent, à toutes les classes; mais leurs indices sont constamment 1 et -1.

8. La circonférence décrite sur le segment de normale, compris entre M et la polaire de ce point par rapport à la circonférence directrice, doit, par une propriété connue, rencontrer orthogonalement la directrice. Du reste, si l'on observe que l'équation du cercle considéré est

$$x^2 + y^2 = (n+1)\rho y,$$

on en déduit sans peine le résultat énoncé. Dérivant la dernière équation, on obtient

$$\rho' y = \frac{n-1}{n+1} x.$$

A cause de (3), cette équation est vérifiée par les coordonnées du pôle. Donc, *la circonférence considérée touche son enveloppe aux extrémités d'une corde contenant le pôle.* D'autre part, il suffit de remarquer que les tangentes à la circonférence, aux extrémités dont il s'agit, sont également inclinées sur la corde, pour pouvoir affirmer que *la circonférence considérée est enveloppée par deux courbes inverses*. Limitons-nous, par exemple, aux cas des lignes cycloïdales et des coniques, et signalons le rapprochement inattendu que les propriétés précédentes établissent entre ces deux importantes familles. Pour $n = 0$, on trouve que *les circonférences décrites sur les rayons de courbure d'une ligne cycloïdale, pris comme diamètres, rencontrent orthogonalement le cercle directeur. Elles enveloppent une seconde ligne inverse de la ligne donnée*. Cette dernière propriété a été remarquée par M. Mennesson [1]. De même, pour $n = -2$, nous voyons que *les symétriques, par rapport aux tangentes, des circonférences décrites sur les rayons de courbure d'une conique, pris comme diamètres, rencontrent orthogonalement le cercle directeur et enveloppent une inverse de conique*. Ajoutons que, pour les coniques, le centre de courbure, en un point M, est symétrique, par rapport à M, du point de rencontre de la normale avec la polaire de M, relativement au cercle directeur. C'est encore une analogie avec les lignes cycloïdales.

9. *Lignes de Ribaucour*. — En faisant tendre c vers zéro ou vers l'infini, suivant la valeur de n, on peut faire en sorte que $c^{\frac{2n}{n-1}}$ augmente indéfiniment, en même temps que R; mais le rapport de ces quantités sera la quantité finie et déterminée $a^{\frac{n+1}{n-1}}$, si l'on pose

$$R = c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

---

[1] *Mathesis*, question 461; 1885.

L'équation (8) devient alors

$$(11)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

Telle est l'*équation intrinsèque des lignes de Ribaucour*.

10. Il convient de remarquer que l'on peut bien substituer, pour ces lignes, la *directrice* à la polaire de M, par rapport au cercle directeur. C'est, en effet, cette dernière droite qui doit intercepter sur la normale un segment proportionnel à ρ; mais il est clair qu'il en est de même de la directrice, puisque celle-ci est située à moitié distance entre le point M et la limite de sa polaire. Du reste, q étant le segment de normale intercepté par la perpendiculaire à OM, située à la distance u — R de M (et qui touche, par conséquent, la circonférence directrice et tend à se confondre avec elle lorsque R croît indéfiniment), on a

$$u - \mathrm{R} = q \sin\omega, \qquad \lim \frac{u}{\mathrm{R}} = 1.$$

Par suite, la formule (5) devient

$$\left(1 + \frac{\mathrm{R}}{u}\right) q = (n+1)\rho;$$

puis, pour R infini,

$$q = \frac{n+1}{2}\rho,$$

ce qui est la définition habituelle des lignes de Ribaucour. Remarquons encore que la formule (7) donne, pour R infini,

$$\rho^{-\frac{n+1}{n-1}} = \lim \frac{u \sin\omega}{c^{\frac{2n}{n-1}}} = \lim \frac{u}{R} \lim \frac{R \sin\omega}{c^{\frac{2n}{n-1}}} = a^{-\frac{n+1}{n-1}} \sin\omega,$$

d'où

$$\rho = a(\sin\omega)^{-\frac{n-1}{n+1}}, \qquad \lim(u - R) = \frac{n+1}{2}\, a(\sin\omega)^{\frac{2}{n+1}}.$$

De là on déduit sans peine que : 1° *les lignes de Ribaucour ne peuvent rencontrer leur directrice que sous un angle droit, et à la condition d'y subir une inflexion ou un rebroussement, ce qui ne saurait arriver ailleurs que sur la directrice;* 2° *il y a rebroussement, et pas d'inflexion, pour les lignes à indice moindre que l'unité, en valeur absolue : inflexion, et pas de rebroussement, pour les lignes dont l'indice surpasse l'unité;* 3° *les lignes dont l'indice est inférieur à* -1 *ne rencontrent pas la directrice*, et, par suite, *elles ne souffrent ni rebroussement ni inflexion*. On vérifie aisément ces circonstances sur les courbes particulières que nous allons obtenir.

11. M. Ribaucour a rencontré ces lignes dans ses recherches sur les *élassoïdes* (¹). Pour les valeurs entières de $\frac{2}{n-1}$, il distingue quatre genres : *cycloïdal, circulaire, parabolique, caténoïdique*. Ces genres répondent aux valeurs de $\frac{2}{n+1}$ qui sont, respectivement, positives et paires, positives et impaires, négatives et paires, négatives et impaires. Pour $n = 1$, nous savons déjà que l'on doit avoir un *cercle*. Pour $n = 0$, l'équation (11) devient

$$\rho^2 + s^2 = a^2 :$$

(¹) Voyez, dans les *Mémoires couronnés* de l'Académie de Belgique, t. XLIV, l'*Étude des élassoïdes*, par M. Ribaucour.

elle représente une *cycloïde;* ce qui devrait être. Pour $n = -3$, la même équation devient

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}:$$

elle représente une *chaînette*. Enfin, pour $n = -2$, on obtient

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

On sait déjà que cette équation doit représenter une *parabole*. Pour n infini, on obtiendrait l'équation

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

qui représente une chaînette d'égale résistance; mais on se tromperait si l'on croyait que cette courbe appartient à la classe des lignes de Ribaucour. Il ne faut pas oublier, en effet, que l'équation (11) a été obtenue en supposant n fini. Il conviendrait d'étudier à part les lignes dont l'indice est infini : leur courbure varie comme la distance du pôle à la tangente. Leur équation intrinsèque cesse d'avoir la forme (8) : il s'y introduit, sous le signe d'intégration, une fonction logarithmique de ρ.

12. Pour $n = 3$ et pour $n = -5$, on obtient les courbes

$$s = 2\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{4} - 1}}, \qquad s = \frac{2}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Il est remarquable que ces équations, par le simple changement de s en $\frac{2}{3}s$ et $2s$, respectivement, deviennent les équations de la lemniscate de Bernoulli et de l'hyperbole équilatère. Faisons, pour finir, $n = -\frac{1}{3}$. L'équation (11) ne prend pas une forme très simple; mais nous trouverons, parmi les *parallèles* à la courbe demandée, une courbe connue. Rappelons, d'abord, que les coordonnées intrinsèques, ρ et s, d'une parallèle à une courbe donnée, sont

$$\rho - h, \quad s - h\int \frac{ds}{\rho},$$

h étant la *distance* des deux courbes. Il en résulte que, si

$$s = \int f(\rho)\, d\rho$$

est l'équation d'une courbe, l'équation des lignes parallèles est

$$(12) \qquad s = \int \frac{f(\rho - h)}{\rho + h}\, \rho\, d\rho.$$

En particulier, les courbes parallèles à celle que nous considérons sont représentées par l'équation intrinsèque

$$s = -\frac{1}{2}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(h+\rho)(a-h-\rho)}}.$$

Pour $h = \frac{a}{2}$, il vient

$$\rho^2 + 4s^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Cette équation représente une *hypocycloïde à quatre rebroussements,* engendrée par un point d'une circonférence, de rayon $\frac{a}{12}$, roulant sans glisser à l'intérieur d'une circonférence quadruple. *La ligne de Ribaucour d'indice* $-\frac{1}{3}$ *est* donc *parallèle à une certaine hypocycloïde*

13. *Spirales sinusoïdes.* — Il suffit de faire $R = 0$,

dans (8), pour avoir l'*équation intrinsèque des spirales sinusoides :*

$$(13) \qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

On peut établir directement les propriétés de ces lignes, en partant de la propriété fondamentale, qui se traduit par l'égalité

$$(14) \qquad u = (n+1)\rho \sin\omega.$$

Soit θ l'angle du rayon vecteur avec une direction fixe, de sorte que

$$(15) \qquad \theta' = -\frac{\sin\omega}{u}.$$

A cause de (14), les formules (2) et (15) deviennent

$$(16) \qquad \omega' = -\frac{n}{n+1}\frac{1}{\rho}, \qquad \theta' = -\frac{1}{n+1}\frac{1}{\rho};$$

d'où, par comparaison, on déduit

$$(17) \qquad \omega = n\theta,$$

pourvu qu'on choisisse convenablement la direction fixe. La propriété (17) justifie la dénomination de *lignes à inflexion proportionnelle,* employée par M. Laquière (1).

14. Si l'on divise par (14) la première des équations (2), en tenant compte de (16), on obtient

$$\frac{u'}{u} = \frac{\omega'}{n}\cot\omega,$$

d'où

$$(18) \qquad u^n = a^n \sin\omega.$$

(1) *Nouvelles Annales,* 1883.

L'équation polaire des spirales sinusoïdes est donc, à cause de (17),

$$u^n = a^n \sin n\theta.$$

En vertu de (18), l'équation (14) donne

$$(19) \qquad \rho = \frac{1}{n+1}\,\frac{a^n}{u^{n-1}}.$$

De même, la première des équations (2) donne, par intégration,

$$(20) \qquad s = -\int \frac{a^n\,du}{\sqrt{a^{2n}-u^{2n}}}.$$

Enfin, l'élimination de u nous reconduit à l'équation (13), abstraction faite de la valeur du paramètre a.

15. Si $n = 0$, la première des équations (16) prouve que l'on a une *spirale logarithmique*, de pôle O. On voit de même que, pour $n = 1$ et pour $n = -1$, on a un *cercle* et une *droite*. Si $n = -2$, l'équation (13) devient

$$s = \tfrac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

et l'on sait qu'elle représente une *hyperbole équilatère*, de centre O. Si $n = -\frac{1}{2}$, on obtient, au signe près,

$$s = \tfrac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}:$$

c'est l'équation d'une *parabole*, dont O est le foyer. Pour $n = \frac{1}{2}$, l'équation (13) devient

$$9\rho^2 + s^2 = 4a^2.$$

Elle représente un *limaçon de Pascal*, engendré par le roulement d'une circonférence, de rayon $\frac{a}{4}$, sur une circonférence égale. Pour $n = 2$, on a

$$s = 3 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - 1}}.$$

C'est l'équation d'une *lemniscate de Bernoulli*. Enfin, pour $n = \frac{1}{3}$, on trouve une parallèle aux courbes représentées par l'équation

$$s = -2 \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{(h+\rho)(a-h-\rho)}}.$$

Si $h = \frac{a}{2}$, il vient

$$4\rho^2 + s^2 = a^2 :$$

c'est une *épicycloïde à deux rebroussements*, engendrée par le roulement d'une circonférence, de rayon $\frac{a}{6}$, sur une circonférence double. *La spirale sinusoïde, d'indice* $\frac{1}{3}$, *est* donc *parallèle à une certaine épicycloïde*.

16. Les spirales sinusoïdes se déduisent les unes des autres par l'opération qui engendre les *podaires*. On sait que les coordonnées intrinsèques, s et ρ, de la podaire d'une courbe, par rapport à un pôle O, sont

$$\int \frac{u \, ds}{\rho}, \quad \frac{u^2}{2u - \rho \sin \omega}.$$

Dans le cas actuel, ces expressions deviennent

$$-(n+1) \int \frac{u^n \, du}{\sqrt{a^{2n} - u^{2n}}}, \quad \frac{n+1}{2n+1} u.$$

On trouve ensuite, par élimination de u, une équation que l'on peut déduire de (13) par le changement de n en $\frac{n}{n+1}$. Donc, *la podaire d'une spirale d'indice n est une* *spirale d'indice* $\frac{n}{n+1}$. En particulier, si l'on applique ce théorème aux courbes considérées précédemment, on voit que : 1° la podaire d'une spirale logarithmique, par rapport au pôle, est une spirale logarithmique ; 2° la podaire d'une parabole, par rapport au foyer, est une droite ; 3° la podaire d'un cercle, par rapport à l'un de ses points, est un limaçon de Pascal ; 4° la podaire d'une hyperbole équilatère, par rapport au centre, est une lemniscate de Bernoulli ; 5° la podaire d'un limaçon de Pascal, par rapport à son point de rebroussement, est parallèle à une épicycloïde à deux rebroussements. Plus généralement, si n est un nombre entier, la spirale d'indice $\frac{1}{n}$ est la $(n-1)^{\text{ième}}$ podaire d'un cercle, par rapport à l'un de ses points ; et la spirale d'indice $\frac{2}{2n+1}$ est la $n^{\text{ième}}$ podaire d'une hyperbole équilatère, par rapport à son centre.

17. Mais il y a une transformation très simple, qui permet de déduire l'une de l'autre deux spirales sinusoïdes quelconques. Cette transformation, proposée par Chasles, a été étudiée par MM. Roberts, Faure, d'Ocagne (1). La *transformation d'indice* ν fait correspondre, au point dont l'affixe est z, le point dont l'affixe ζ est lié à z par l'égalité

$$a^{\nu-1}\zeta = z^{\nu}.$$

Le résultat que nous allons obtenir est d'une extrême évidence, si l'on fait attention à l'équation polaire des spirales ; mais nous voulons, ici, nous servir exclusive-

(1) Voyez, dans le *Journal de Teixeira*, 1883, l'étude de M. d'Ocagne *Sur une transformation polaire des courbes planes*.

ment des méthodes intrinsèques. Les coordonnées du transformé de M, par rapport à la tangente et à la normale à (M), en M, sont

$$x = u\cos\omega - \frac{u^\nu}{a^{\nu-1}}\cos[\omega - (\nu - 1)\theta],$$

$$y = u\sin\omega - \frac{u^\nu}{a^{\nu-1}}\sin[\omega - (\nu - 1)\theta].$$

On en déduit, pour exprimer leurs variations absolues dans le plan,

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds} = \nu\left(\dfrac{u}{a}\right)^{\nu-1}\cos(\nu - 1)\theta, \\[2ex] \dfrac{\delta y}{ds} = -\nu\left(\dfrac{u}{a}\right)^{\nu-1}\sin(\nu - 1)\theta. \end{cases}$$

On voit donc que l'angle des tangentes aux deux lignes est $\pi - (\nu - 1)\theta$, d'où il suit que *les tangentes en deux points correspondants concourent sur la circonférence déterminée par ces points et par le pôle.* Élevant au carré et ajoutant les égalités (21), on trouve, pour exprimer l'arc de la transformée,

$$a^{\nu-1}s_1 = \nu\int u^{\nu-1}\,ds.$$

Pour avoir le rayon de courbure, les mêmes égalités donnent, après une nouvelle dérivation,

$$a^{\nu-1}\rho_1 = \frac{\nu u^\nu \rho}{u + (\nu - 1)\rho\sin\omega}.$$

Dans le cas particulier des spirales sinusoïdes, ces formules deviennent, en vertu de (19) et (20),

$$s_1 = -\nu a^{n-\nu+1}\int\frac{u^{\nu-1}\,du}{\sqrt{a^{2n} - u^{2n}}},\qquad \rho_1 = \frac{\nu a}{n+\nu}\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu-n};$$

puis, par élimination de u, on arrive à la proposition évidente : *La transformée d'indice* ν *d'une spirale d'indice* n *est une spirale d'indice* $\frac{n}{\nu}$. En particulier, la podaire d'une spirale d'indice n peut se déduire de cette courbe par une transformation d'indice $n+1$.

18. Remarquons que la transformation d'indice -1 ne diffère pas essentiellement de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Donc, *deux spirales sinusoïdes, aux indices égaux et de signes contraires, sont deux courbes inverses*. Exemples : 1° deux spirales logarithmiques; 2° droite et cercle; 3° parabole et limaçon de Pascal; 4° hyperbole équilatère et lemniscate de Bernoulli. Une autre transformation particulière, remarquée par Chasles, est celle d'indice 2. On voit immédiatement que la transformée d'une droite est une parabole, la transformée d'un cercle est un limaçon de Pascal, etc. Ce dernier théorème, dû à Chasles, a été retrouve et précisé par M. d'Ocagne, dans la Note citée. On voit encore que, par une transformation d'indice 4, on saurait déduire une parabole d'une hyperbole équilatère, un limaçon de Pascal d'une lemniscate de Bernoulli; etc. Pour finir, nous remarquerons que toutes ces courbes se déduisent aisément du cercle, en prenant comme pôle un point de la circonférence, et la tangente en ce point comme axe polaire. En effet, *toute spirale d'indice* n *dérive du cercle par une transformation d'indice* $\frac{1}{n}$.

19. Les géomètres ont déjà remarqué que les spirales sinusoïdes peuvent être parcourues par un mobile, attiré vers le pôle en raison inverse de la $(2n+3)^{\text{ième}}$ puissance de la distance, n étant l'indice de la courbe. Soit $\frac{a^{2n+4}}{u^{2n+3}}$ l'intensité de l'accélération totale, de sorte que, v

étant la vitesse, les accélérations tangentielle et centripète soient

$$(22)\qquad vv' = \left(\frac{a}{u}\right)^{2n+4}\alpha,\qquad \frac{v^2}{\rho} = \left(\frac{a}{u}\right)^{2n+4}\beta.$$

Divisant membre à membre, on a

$$\frac{v'}{v} = \frac{\alpha}{\beta\rho} = -\frac{\beta'}{\beta},$$

d'où

$$v = \frac{k}{\beta}.$$

D'après cela, les égalités (22) donnent

$$(23)\qquad \rho = \frac{k^2}{\beta^3}\left(\frac{u}{a}\right)^{2n+4}.$$

Or, si l'on observe la relation (4), l'égalité (23) prend la forme

$$(24)\qquad \left(\frac{a}{u}\right)^{2n+4} uu' = \frac{k^2\beta'}{\beta^3};$$

d'où l'on déduit, en particulier,

$$(25)\qquad a^{2n+4}\beta^2 = (n+1)\,k^2\,u^{2n+2},$$

pourvu que n diffère de -1. Dès lors, l'égalité (23) devient

$$\beta\rho = \frac{u^2}{n-1},\qquad \text{d'où}\qquad u = (n+1)\,\rho\sin\omega:$$

c'est l'égalité (14), qui suffit pour définir les spirales sinusoïdes, d'indice n.

20. Évidemment, ce ne sont là que des cas fort particuliers de toutes les trajectoires possibles. Ainsi, en nous bornant au cas de $n = -2$, nous obtenons seulement l'hyperbole équilatère; mais nous retrouvons toute la famille des coniques si, dans l'intégration de (24), nous n'égalons plus à zéro la constante arbitraire. Il vient alors, au lieu de (25),

$$u^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{c^4}{\beta^2},$$

et l'on détermine les valeurs des constantes R et c, en fonction des axes de la courbe, en observant que, pour $\alpha = 0$, la valeur commune de u et β est a ou b. Il en résulte

$$\mathrm{R}^2 = a^2 - b^2, \qquad c^2 = ab.$$

Conséquemment,

$$\alpha = \sqrt{\frac{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}{a^2 + b^2 - u^2}}, \qquad \beta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - u^2}}.$$

Puis, en vertu de (23),

$$\rho = \frac{(a^2 + b^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad s = -\int \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - u^2}{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}}\, u\, du.$$

En éliminant u, nous retrouvons l'équation (10), qui représente toutes les coniques. On arrive au même résultat, lorsque $n = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas, le point O n'est plus le *centre*, mais bien un *foyer* de la conique. On obtient d'abord

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2au - u^2 - b^2}} = \frac{\beta}{b} = \sqrt{\frac{u}{2a - u}};$$

puis

$$\rho = \frac{(2au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad s = -\int \sqrt{\frac{2au - u^2}{2au - u^2 - b^2}}\, du$$

Enfin, l'élimination de u nous reconduit à l'équation intrinsèque (10), et l'on peut démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs de n pour lesquelles ce fait soit possible.