T.-J. STIELTJES

Note sur l'intégrale $\int_a^b f(x)G(x)dx$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 161-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__161_0>

NOTE SUR L'INTÉGRALE $\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

L'objet de cette Note est la démonstration de la proposition suivante :

Soit $f(x)$ une fonction non décroissante entre les limites $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$. Alors il est toujours possible de déterminer n constantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b,$$

et $n+1$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ qui sont comprises respectivement dans les $n+1$ intervalles formés par les $n+2$ quantités

$$f(a),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_{n-1}),\quad f(x_n),\quad f(b),$$

de telle façon qu'on ait

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,G_{2n}(x)\,dx \\
&\quad = a_1 \int_a^{x_1} G_{2n}(x)\,dx + a_2 \int_{x_1}^{x_2} G_{2n}(x)\,dx \\
&\qquad + a_3 \int_{x_2}^{x_3} G_{2n}(x)\,dx + \ldots \\
&\qquad + a_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_{2n}(x)\,dx + a_{n+1} \int_{x_n}^{b} G_{2n}(x)\,dx,
\end{aligned}$$

$G_{2n}(x)$ étant un polynôme quelconque en x du degré $2n$ au plus.

1. La détermination des constantes x_k, a_k est évidemment un problème déterminé, car les conditions

imposées fournissent $2n+1$ relations entre ces inconnues. Pour les écrire, nous pouvons prendre

$$G_{2n}(x)=(x-a)^k$$

en faisant

$$k=0,1,2,\ldots,2n.$$

Il vient ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(k+1)\int_a^b (x-a)^k f(x)\,dx \\ &\quad= -(a_2-a_1)(x_1-a)^{k+1} \\ &\qquad -(a_3-a_2)(x_2-a)^{k+1} \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad -(a_{n+1}-a_n)(x_n-a)^{k+1}+a_{n+1}(b-a)^{k+1} \end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,2,\ldots,2n).$$

Remplaçons dans cette relation k par $k+1$ et retranchons les deux équations, après avoir multiplié la première par $b-a$; on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b [(b-a)(k+1) \\ &\qquad -(k+2)(x-a)](x-a)^k f(x)\,dx \\ &\quad= -(a_2-a_1)(b-x_1)(x_1-a)^{k+1} \\ &\qquad -(a_3-a_2)(b-x_2)(x_2-a)^{k+1} \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad -(a_{n+1}-a_n)(b-x_n)(x_n-a)^{k+1} \end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,2,\ldots,2n-1).$$

Pour simplifier, nous posons

$$(3)\quad (a_{k+1}-a_k)(b-x_k)(x_k-a)=A_k \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

et nous remarquons que

$$\begin{aligned} &\int[(b-a)(k+1)-(k+2)(x-a)](x-a)^k f(x)\,dx \\ &\quad=(b-x)(x-a)^{k+1}f(x)-\int(b-x)(x-a)^{k+1}f'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Les relations (2) peuvent donc s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b (b-x)(x-a)^{k+1}f'(x)\,dx \\ &\quad= A_1(x_1-a)^k+A_2(x_2-a)^k+\ldots+A_n(x_n-a)^k \end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,2,\ldots,2n-1).$$

et il est clair par là qu'on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (b-x)(x-a)f'(x)\,G_{2n-1}(x)\,dx \\ \quad = A_1 G_{2n-1}(x_1) + A_2 G_{2n-1}(x_2) + \ldots + A_n G_{2n-1}(x_n), \end{cases}$$

$G_{2n-1}(x)$ étant un polynôme quelconque en x du degré $2n-1$ au plus. On reconnaît maintenant que la détermination de $x_1, x_2, \ldots, x_n, A_1, A_2, \ldots, A_n$ revient à la solution d'un problème bien connu. On sait que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation

$$(5)\qquad P_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots = 0,$$

$P_n(x)$ étant le dénominateur du degré n d'une des réduites de la fraction continue

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \frac{(b-z)(z-a)f'(z)}{x-z}\,dz \\ \quad = \cfrac{\lambda_0}{x-\alpha_0-\cfrac{\lambda_1}{x-\alpha_1-\cfrac{\lambda_2}{x-\alpha_2-\ldots}}} \end{cases}$$

Ces racines sont réelles, inégales et comprises dans l'intervalle (a, b), et nous pouvons supposer

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

On connaît aussi l'expression des constantes A_k qui sont positives. En posant

$$Q_n(x) = \int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)\,\frac{P_n(x)-P_n(z)}{x-z}\,dz,$$

$\dfrac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ est une des réduites de la fraction continue, et l'on a

$$A_k = \frac{Q_n(x_k)}{P'_n(x_k)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

On peut encore se servir de la formule suivante qui n'exige pas la connaissance du numérateur $Q_n(x)$,

$$A_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{P_{n-1}(x_k)P'_n(x_k)} \qquad (k=1, 2, \ldots. n). \tag{7}$$

Les constantes λ_k, α_k qui figurent dans la fraction continue et les polynômes $P_k(x)$ se calculent de proche en proche par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = 1, \\ P_1 = x - \alpha_0, \\ P_2 = (x-\alpha_1)P_1 - \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{k+1} = (x-\alpha_k)P_k - \lambda_k P_{k-1}; \end{array}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0 = \displaystyle\int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)\,dz \\ \lambda_k = \dfrac{\displaystyle\int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)[P_k(z)]^2\,dz}{\displaystyle\int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)[P_{k-1}(z)]^2\,dz} \qquad (k=1,2,3\ldots), \end{array}\right. \tag{9}$$

$$\alpha_k = \frac{\displaystyle\int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)\,z[P_k(z)]^2\,dz}{\displaystyle\int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)[P_k(z)]^2\,dz} \qquad (k=0,1,2\ldots). \tag{10}$$

2. Il reste à trouver les inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

On connaît d'abord, par les relations (3), les différences

$$a_{k+1} - a_k = \frac{A_k}{(b-x_k)(x_k-a)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Pour achever la détermination des a_k, il faut recourir à l'une des équations (1). En choisissant, pour plus de simplicité, la première ($k=0$), on a

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)a_{n+1} \\ \qquad\qquad - \dfrac{A_1}{b-x_1} - \dfrac{A_2}{b-x_2} - \ldots - \dfrac{A_n}{b-x_n}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Cette équation fera connaître a_{n+1}, et l'on trouve ensuite tous les a_k à l'aide de (11).

Des combinaisons et réductions faciles fournissent, du reste, les formules suivantes :

$$
(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &(b-a)[a_1 - f(a)] \\ &= \int_a^b (b-x) f'(x)\, dx - \frac{A_1}{x_1 - a} - \frac{A_2}{x_2 - a} - \ldots - \frac{A_n}{x_n - a}, \end{aligned} \right.
$$

$$
(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &(b-a)[a_{k+1} - f(x_k)] \\ &= -\int_a^{x_k} (x-a) f'(x)\, dx \\ &\quad + \frac{A_1}{b-x_1} + \frac{A_2}{b-x_2} + \ldots + \frac{A_k}{b-x_k} \\ &\quad + \int_{x_k}^b (b-x) f'(x)\, dx \\ &\quad - \frac{A_{k+1}}{a_{k+1}-a} - \frac{A_{k+2}}{a_{k+2}-a} - \ldots - \frac{A_n}{x_n - a} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \ldots, n),
$$

$$
(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &(b-a)[f(b) - a_{n+1}] \\ &= \int_a^b (x-a) f'(x)\, dx - \frac{A_1}{b-x_1} - \frac{A_2}{b-x_2} - \ldots - \frac{A_n}{b-x_n}, \end{aligned} \right.
$$

$$
(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &(b-a)[f(x_k) - a_k] \\ &= \int_a^{x_k} (x-a) f'(x)\, dx \\ &\quad - \frac{A_1}{b-x_1} - \frac{A_2}{b-x_2} - \ldots - \frac{A_{k-1}}{b-x_{k-1}} \\ &\quad - \int_{x_k}^b (b-x) f'(x)\, dx \\ &\quad + \frac{A_k}{x_k - a} + \frac{A_{k+1}}{x_{k+1}-a} + \ldots + \frac{A_n}{x_n - a} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \ldots, n).
$$

3. Le problème proposé est ainsi résolu complètement; il nous reste seulement à démontrer que les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont comprises respective

ment dans les intervalles formés par

$$f(a),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_n),\quad f(b).$$

Remarquons d'abord qu'on a évidemment (11)

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}.$$

Ensuite nous observons que l'équation qui nous a servi de point de départ peut s'écrire

$$\int_a^b f(x)\,G_{2n}(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,G_{2n}(x)\,dx,$$

en désignant par $\varphi(x)$ une fonction discontinue, non décroissante, définie de la manière suivante :

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \varphi(x) = a_1 & \text{pour} & a < x < x_1, \\ \varphi(x) = a_2 & \text{»} & x_1 < x < x_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi(x) = a_n & \text{»} & x_{n-1} < x < x_n, \\ \varphi(x) = a_{n+1} & \text{»} & x_n < x < b. \end{array}\right.$$

On a, par conséquent,

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

On en conclut que la différence

$$f(x) - \varphi(x)$$

doit changer de signe au moins $2n+1$ fois dans l'intervalle (a, b).

En effet, si l'on suppose que le nombre l des changements de signe soit inférieur à $2n+1$, donc

$$l \leqq 2n,$$

et que ces changements de signe se produisent pour

$$x = X_1,\qquad x = X_2,\qquad \ldots\qquad x = X_l.$$

il est clair qu'en posant

$$G(x) = (x - X_1)(x - X_2)\ldots(x - X_l),$$

la fonction

$$[f(x) - \varphi(x)]\,G(x)$$

aurait un signe constant dans l'intervalle (a, b). Or, $G(x)$ étant un polynôme de degré $2n$ au plus, on doit avoir

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,G(x)\,dx = 0,$$

ce qui est impossible. La supposition $l \leqq 2n$ est donc inadmissible et

$$f(x) - \varphi(x)$$

doit changer de signe au moins $2n+1$ fois dans l'intervalle (a, b). Or, si l'on construit les lignes

$$y = f(x),$$
$$y = \varphi(x),$$

et qu'on se rappelle que $f(x)$ est non décroissant, on voit immédiatement que l ne peut pas être supérieur à $2n+1$ et qu'on a, par conséquent, $l = 2n+1$; ensuite, il est clair qu'on a nécessairement

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} f(a) < \varphi(a), \\ \varphi(x_k - \varepsilon) < f(x_k) < \varphi(x_k + \varepsilon) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi(b) < f(b), \end{array}\right.$$

ε étant une quantité positive suffisamment petite. Or ces inégalités expriment précisément la propriété qu'il s'agissait de démontrer.

4. D'après ce qu'on vient de voir, les premiers membres des formules (13), (14), (15) et (16) sont positifs. On peut démontrer aussi directement que les se-

conds membres sont positifs. C'est là une conséquence immédiate des inégalités

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^{x_k}(x-a)f'(x)\,dx > \frac{A_1}{b-x_1}+\frac{A_2}{b-x_2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{b-x_{k-1}} & (k=1,2,\ldots,n+1), \\ \displaystyle\int_a^{x_k}(x-a)f'(x)\,dx < \frac{A_1}{b-x_1}+\frac{A_2}{b-x_2}+\ldots+\frac{A_k}{b-x_k} & (k=1,2,\ldots,n); \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_k}^{b}(b-x)f'(x)\,dx < \frac{A_k}{x_k-a}+\frac{A_{k+1}}{x_{k+1}-a}+\ldots+\frac{A_n}{x_n-a} & (k=1,2,\ldots,n), \\ \displaystyle\int_{x_k}^{b}(b-x)f'(x)\,dx > \frac{A_{k+1}}{x_{k+1}-a}+\frac{A_{k+2}}{x_{k+2}-a}+\ldots+\frac{A_n}{x_n-a} & (k=0,1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

(On doit prendre $x_0=a$, $x_{n+1}=b$ dans ces formules). On peut les établir de la manière suivante. Soit

$$(21)\qquad m(x)=\int_a^x (x-a)f'(x)\,dx,$$

$m(x)$ sera une fonction non décroissante et $m(a)=0$. Définissons ensuite une seconde fonction discontinue et non décroissante, ainsi qu'il suit :

$$(22)\quad \begin{cases} \mu(x)=0 & \text{lorsque } a<x<x_1, \\ \mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1} & \text{»}\quad x_1<x<x_2, \\ \mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1}+\dfrac{A_2}{b-x_2} & \text{»}\quad x_2<x<x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{»}\quad \ldots\ldots\ldots, \\ \mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1}+\ldots+\dfrac{A_{n-1}}{b-x_{n-1}} & \text{»}\quad x_{n-1}<x<x_n, \\ \mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1}+\ldots+\dfrac{A_n}{b-x_n} & \text{»}\quad x_n<x<b. \end{cases}$$

Par une intégration par parties, on trouve

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_a^b (b-x)^k\, m(x)\, dx\\ &= \frac{1}{k+1}\int_b^a (b-x)^{k+1}(x-a)f'(x)\, dx,\end{aligned}\right.$$

et, d'après la définition même de la fonction $\mu(x)$, on trouve

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_a^b (b-x)^{k+1}\mu(x)\, dx\\ &= \frac{1}{k+1}[A_1(b-x_1)^k + A_2(b-x_2)^k + \ldots + A_n(b-x_n)^k].\end{aligned}\right.$$

En faisant attention à la formule (4), on en conclut

$$\int_a^b [m(x)-\mu(x)](b-x)^k\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1);$$

d'où il suit que la différence

$$m(x) - \mu(x)$$

doit changer de signe au moins $2n$ fois dans l'intervalle (a, b). Mais, d'après la nature de la fonction $\mu(x)$, on voit facilement que le nombre des changements de signe doit être exactement égal à $2n$ et qu'on a, en outre,

$$\mu(x_k-\varepsilon) < m(x_k) < \mu(x_k+\varepsilon) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\mu(b) < m(b).$$

Or ce sont là précisément les inégalités (19).

Pour démontrer les inégalités (20), nous posons

$$(25)\qquad n(x) = \int_a^b (b-x)f'(x)\, dx$$

et

$$(26)\quad\begin{cases} \nu(x) = \dfrac{A_1}{x_1 - a} + \dfrac{A_2}{x_2 - a} + \ldots + \dfrac{A_n}{x_n - a} & \text{lorsque } a < x < x_1, \\ \nu(x) = \dfrac{A_2}{x_2 - a} + \ldots + \dfrac{A_n}{x_n - a} & \quad\text{»}\quad a_1 < x < x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad\text{»}\quad \ldots\ldots\ldots, \\ \nu(x) = \dfrac{A_n}{x_n - a} & \quad\text{»}\quad x_{n-1} < x < x_n, \\ \nu(x) = 0 & \quad\text{»}\quad x_n < x < b. \end{cases}$$

Les deux fonctions sont non croissantes et

$$n(b) = \nu(b) = 0.$$

Ensuite on trouve facilement

$$(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (x-a)^k n(x)\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{k+1}\int_a^b (x-a)^{k+1}(b-x) f'(x)\,dx \end{cases}$$

et

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (x-a)^k \nu(x)\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{k-1}\left[A_1(x_1-a)^k + A_2(x_2-a)^k + \ldots + A_n(x_n-a)^k\right]. \end{cases}$$

On voit par là qu'on a

$$\int_a^b [n(x) - \nu(x)](x-a)^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots 2n-1);$$

d'où il suit que la différence

$$n(x) - \nu(x)$$

doit changer de signe au moins $2n$ fois dans l'intervalle (a, b). Mais, comme tout à l'heure, il est facile de voir que le nombre des changements de signe doit être exactement égal à $2n$, et qu'on a nécessairement

$$\nu(x_k + \varepsilon) < n(x_k) < \nu(x_k - \varepsilon) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\nu(a) < n(a),$$

ce qui équivaut aux inégalités (20).