NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur la courbure des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 152-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__152_1>

SUR LA COURBURE DES CONIQUES;

PAR M. E. CESARO.

1. Soient, par rapport à la tangente et à la normale en un point M d'une ligne quelconque, α et β les coordonnées d'un point fixe O, centre d'une conique osculatrice, en M, à la ligne considérée. L'équation de la conique est de la forme

$$(1)\qquad A(x-\alpha)^2 + 2C(x-\alpha)(y-\beta) + B(y-\beta)^2 = 1,$$

et l'immobilité de O est exprimée par les égalités

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta-\rho}{\rho}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

Différentions (1) deux fois de suite; puis, pour exprimer l'osculation avec la ligne fondamentale, supposons

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y' = 0, \qquad y'' = \frac{1}{\rho}.$$

On détermine ainsi les coefficients A, B, C, et l'on voit que l'équation de la conique osculatrice est

$$(3)\qquad (\beta x - \alpha y)^2 = \beta\rho y(2\beta - y).$$

2. Pour chercher l'enveloppe de cette conique, différentions l'équation (3) en supposant

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y-\rho}{\rho}, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho},$$

et en tenant compte de (2). Il vient

$$(4) \qquad y(2\beta - y)\left(\beta\frac{d\rho}{ds} - 3\alpha\right) = 0.$$

Si

$$(5) \qquad \frac{d\rho}{ds} = 3\frac{\alpha}{\beta},$$

l'équation (4) est vérifiée identiquement, et, par suite, la ligne fondamentale coïncide avec la conique osculatrice. Il en résulte que l'équation (5) caractérise les coniques. Elle nous dit que, pour avoir le deuxième centre de courbure, N, en un point M d'une conique, il faut d'abord chercher le point P, où le diamètre OM rencontre la normale à la développée. Cela étant, le segment PN est partagé par le premier centre de courbure dans le rapport de 1 à 3.

3. La dernière propriété nous présente les coniques comme appartenant à une classe, très étendue, de courbes. Il suffit de se demander quelles sont les lignes, pour lesquelles le deuxième centre de courbure se construit comme précédemment, sauf que le segment PN doit être partagé par le premier centre de courbure dans le rapport de 1 à m. On doit écrire, au lieu de (5),

$$(6) \qquad \frac{d\rho}{ds} = m\frac{\alpha}{\beta};$$

puis, en vertu de (2),

$$\frac{d\rho}{ds} + \frac{m\rho}{\beta}\frac{d\beta}{ds} = 0.$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{k}{\beta^m}. \tag{7}$$

Dès lors, une des équations (2) devient, pour $m \gtrless 1$,

$$\alpha = -\frac{k}{\beta^m}\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{m-1}\frac{d}{ds}\frac{k}{\beta^{m-1}}.$$

D'autre part, les mêmes équations donnent

$$\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \beta\frac{d\beta}{ds} + \alpha = 0.$$

d'où, par intégration,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{2k}{m-1}\beta^{1-m} = k'. \tag{8}$$

Par élimination de α, β entre les équations (6), (7), (8), et par substitution de s, $\frac{\rho}{s}$, à ρ, $\frac{d\rho}{ds}$, respectivement, on voit que les développées premières des courbes dont il s'agit sont représentées par l'équation intrinsèque générale

$$\rho = ms\sqrt{As^{\frac{2}{m}} + Bs^{1+\frac{1}{m}} - 1}.$$

En particulier, pour $m = -1$, on obtient les lignes cycloïdales.

Le cas où $k' = 0$, ce qui entraîne $A = 0$, est fort important : on obtient alors les spirales sinusoïdes, dont nous parlerons dans un prochain article. Le paramètre m suffit, en général, pour caractériser une famille de courbes; mais il convient de remarquer qu'il y a des exceptions, en nombre restreint. Une épicycloïde répond aux valeurs $m = -1$ et $m = -\frac{1}{3}$. Cela s'explique par la possibilité de l'existence de deux points différents, jouant le rôle du point O. C'est ainsi que la parabole admet, comme toute conique, le paramètre 3, lorsque le point O est à l'infini, sur l'axe ; mais elle admet également le paramètre — 3, lorsque le point O est le foyer.

4. Pour les coniques, la détermination de k et k' se fait aisément en fonction des longueurs a et b des demi-axes. En effet, lorsque la normale passe par le centre, elle coïncide avec un axe, et, par suite, si $\alpha = 0$, on doit avoir $\beta = a$ ou $\beta = b$. Si l'on porte ces hypothèses dans la relation (8), en supposant $m = 3$, on obtient

$$(9) \qquad k = a^2 b^2, \qquad k' = a^2 + b^2.$$

Donc, en tenant compte de (7) et de (8), on voit que les longueurs des axes de la conique osculatrice à une ligne quelconque sont données par les équations

$$(10) \qquad a^2 b^2 = \beta^3 \rho, \qquad a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \beta\rho.$$

Il est clair que celles-ci ne cessent de subsister lorsque le point O est mobile dans le plan. Les dernières équations peuvent donc servir à résoudre toute question concernant les séries de coniques, qui osculent une ligne quelconque en tous ses points. Quant aux équations (2), elles subsistent seulement dans le cas particulier où les coniques considérées ont même centre. Dans d'autres cas particuliers, on doit chercher, avant tout, les relations qu'il faut substituer aux équations (2). Ainsi, par exemple, si l'on veut considérer une série de coniques égales, on doit différentier les équations (10), en y supposant a et b constants, et en tenant compte de (5).

5. On interprète aisément les équations (10). La première donne lieu à tous les théorèmes connus sur la courbure des coniques. La seconde nous dit que, si du

milieu du rayon de courbure, comme centre, on décrit la circonférence qui passe par le symétrique du centre de la courbe, relativement à la tangente, on détermine sur cette droite un segment constant. Ce segment est nul pour les hyperboles équilatères. Une propriété semblable appartient à toutes les courbes définies par l'équation (6). En effet, l'équation (8) prend, en vertu de (7), la forme

$$\alpha^2 + \left(\beta + \frac{\rho}{m-1}\right)^2 = \frac{\rho^2}{(m-1)^2} + k'.$$

6. En particulier, pour $m = -1$, on voit que la circonférence ayant pour centre le milieu d'un rayon de courbure d'une ligne cycloïdale, et passant par le centre du cercle directeur, découpe sur la tangente une corde de longueur constante. On peut ajouter que cette corde est égale au diamètre du cercle directeur. En effet, la détermination des constantes k, k' se fait aisément en observant que l'on a $\alpha = \mathrm{R}$, $\beta = 0$, aux points de rebroussement, et $\alpha = 0$, $\beta = \mathrm{R} + 2r$, aux sommets de la courbe : R et r sont les rayons du cercle directeur et du cercle roulant. On trouve ainsi, au lieu de (8),

$$(11) \qquad \frac{\alpha^2}{\mathrm{R}^2} + \frac{\beta^2}{(\mathrm{R}+2r)^2} = 1$$

Cela prouve que, aux yeux d'un mobile parcourant une ligne cycloïdale, le centre du cercle directeur semble se mouvoir sur une ellipse. Cela étant, l'équation (7) donne

$$(12) \qquad \beta = \frac{(\mathrm{R}+2r)^2}{4r(\mathrm{R}+r)}\rho,$$

et l'on en déduit, en vertu de la première des équations (2),

$$(13) \qquad \alpha = \frac{\mathrm{R}^2}{4r(\mathrm{R}+r)}s,$$

puis, par substitution dans (11),

$$(R+2r)^2\rho^2 + R^2 s^2 = 16 r^2 (R+r)^2.$$

C'est l'équation intrinsèque de la ligne cycloïdale.

7. Revenons aux coniques. Si l'on porte les valeurs (9) dans l'égalité (8), en supposant $m = 3$, on obtient

$$(14)\qquad (a^2-\beta^2)(\beta^2-b^2) = \alpha^2\beta^2.$$

C'est l'équation de la courbe que le centre semble décrire, aux yeux d'un mobile parcourant la conique ([1]). Cette équation permet d'écrire

$$\beta^2 - b^2 = \alpha\beta \tang\varphi, \qquad a^2-\beta^2 = \alpha\beta\cot\varphi,$$

et l'on reconnaît sans peine que φ représente l'inclinaison de la tangente sur le grand axe. On trouve aussi

$$2\alpha\beta = c^2\sin 2\varphi, \qquad \alpha^2-\beta^2+\beta\rho = c^2\cos 2\varphi,$$

où $2c$ représente la distance focale. En tenant compte de (2), ces équations montrent que, si l'on pose, pour abréger,

$$(15)\qquad 2Kc = \beta\frac{d\rho}{ds} - 3\alpha,$$

on a

$$a\frac{da}{ds} = Kc\cos^2\varphi, \qquad b\frac{db}{ds} = Kc\sin^2\varphi,$$

$$\frac{dc}{ds} = K\cos 2\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{\rho} - \frac{K}{c}\sin 2\varphi.$$

8. On peut appliquer ces formules à la recherche des lignes décrites par les foyers. Les coordonnées d'un foyer

---

([1]) On suppose, bien entendu, que le mobile *se rende compte* de la courbure de la trajectoire, ce qui, en réalité, n'arrive pas. On peut dire aussi que l'équation considérée représente le lieu des centres des coniques égales, touchant une droite donnée en un point donné.

sont

$$x = \alpha + c \cos\varphi, \qquad y = \beta + c \sin\varphi,$$

et l'on trouve, par les moyens habituels, que leurs variations absolues dans le plan sont données par les formules

$$\frac{\delta x}{ds} = \mathrm{K} \cos\varphi, \qquad \frac{\delta y}{ds} = - \mathrm{K} \sin\varphi.$$

Donc la tangente au lieu d'un foyer et le grand axe sont également inclinés sur la tangente à la courbe. On voit aussi que le rapport des arcs élémentaires des deux courbes est précisément la fonction K, définie par (15), de sorte que

(16) $$s_0 = \int \mathrm{K}\, ds.$$

Enfin, le rayon de courbure est donné par

(17) $$\frac{1}{2\rho_0} = \frac{1}{\mathrm{K}\rho} + \frac{\alpha\beta}{c^3}.$$

Les équations (16) et (17) conduisent, dans chaque cas particulier, à l'équation intrinsèque du lieu des foyers. On a une application simple de ces formules en considérant les coniques osculatrices à une ligne cycloïdale, et concentriques au cercle directeur. Il faut employer, dans ce cas, les formules (12) et (13).

9. Nous avons vu que le rayon de courbure d'une conique est donné par la formule

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{\beta^3}.$$

L'élimination de α, β, entre cette équation et les équations (5), (14), donne

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + 9\left[1 - \left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 0.$$

L'équation intrinsèque d'une développée de conique est donc

$$\rho = 3s\sqrt{\left[\left(\frac{as}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \left(\frac{bs}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}.$$

En particulier, on a

$$\rho = 3s\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1},$$

pour la développée d'une hyperbole équilatère, et

$$\rho = 3s\sqrt{\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}.$$

pour la développée d'une parabole.

10. La méthode précédente est facilement applicable à l'étude de la courbure d'une ligne quelconque. On généralise, par exemple, les résultats qui précèdent, en étudiant les lignes représentées, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$Ax^m + 2Cx^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m}{2}} + By^m = 1.$$

On trouve que la courbure varie en raison directe de la $(m-2)^{\text{ieme}}$ puissance de la distance de l'origine à la normale, et de la $(m+1)^{\text{ieme}}$ puissance de la distance de l'origine à la tangente. Des résultats d'une plus grande généralité peuvent être obtenus, en considérant une équation cartésienne quelconque, renfermant trois arbitraires.