NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÀRO

Question de géométrie intrinsèque

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 147-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__147_1>

QUESTION DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

PAR M. ERNEST CESARO.

La question dont il s'agit a été l'objet d'une Communication de M. Pellet à l'Académie des Sciences, le 31 mai 1887. Ayant porté sur les normales à une ligne (M), inclinées de α sur les normales principales, des longueurs $MM_1 = l$, étudions la ligne (M_1) en prenant pour axes mobiles la tangente, la binormale et la normale principale à (M), en M. Les coordonnées de M_1 sont

$$x = 0, \qquad y = l\sin\alpha, \qquad z = l\cos\alpha,$$

et leurs dérivées par rapport à s sont nulles. On a donc

$$(1) \qquad \frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{l\cos\alpha}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{l\cos\alpha}{r}, \qquad \frac{\delta z}{ds} = \frac{l\sin\alpha}{r}.$$

Il en résulte que le rapport des carrés des vitesses des points M_1, M est

$$(2) \qquad K^2 = \left(1 - \frac{l\cos\alpha}{\rho}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2},$$

ce qui permet de poser

$$(3) \qquad 1 - \frac{l\cos\alpha}{\rho} = K\cos u, \qquad \frac{l}{r} = K\sin u,$$

u étant l'angle des tangentes aux deux lignes, en M et M_1. Dès lors, les cosinus directeurs de la tangente à (M_1), en M_1, sont, d'après (1),

$$a = \cos u, \qquad b = -\cos\alpha \sin u, \qquad c = \sin\alpha \sin u.$$

On remarquera que $b \sin\alpha + c \cos\alpha = 0$. La ligne (M_1) rencontre donc orthogonalement les droites MM_1. Que faut-il pour que ces droites soient les normales principales de (M_1)? Telle est la question posée par M. Pellet, et que nous allons résoudre par les méthodes intrinsèques.

Pour que MM_1 soit la normale principale de (M_1), en M_1, il faut et il suffit, en vertu des formules de Frenet, que δa soit nul. Mais

$$\frac{\delta a}{ds} = \frac{da}{ds} - \frac{c}{\rho} = -\left(\frac{du}{ds} + \frac{\sin\alpha}{\rho}\right)\sin u,$$

et l'on peut écarter l'hypothèse $\sin u = 0$, qui nous conduirait au cas de deux lignes planes, parallèles. Conséquemment

$$u = -\sin\alpha \int \frac{ds}{\rho}. \tag{4}$$

D'autre part, les formules (3) nous donnent

$$\frac{r}{\rho}\operatorname{tang} u = \frac{l}{\rho - l\cos\alpha}. \tag{5}$$

On obtient donc, par élimination de u, une des équations intrinsèques de (M), l'autre équation restant arbitraire.

Supposons connues les équations intrinsèques de (M), et tâchons d'en déduire celles de (M_1). Connaissant ρ et r en fonction de s, on connaîtra K par (2), et u par (4) ou par (5). Cela étant, on a immédiatement

$$(6) \qquad s_1 = \int \mathrm{K}\, ds.$$

Pour avoir la flexion de (M_1) remarquons que

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial b}{ds} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial c}{ds} = \frac{\cos\alpha\cos u}{\rho} - \frac{\sin u}{r}.$$

Le dernier membre représente donc $\frac{\varepsilon_1}{ds}$. Par suite

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{K}}{\rho_1} = \frac{\cos\alpha\cos u}{\rho} - \frac{\sin u}{r},$$

ou bien, en vertu de (3),

$$(8) \qquad 1 + \frac{l}{\rho_1} = \frac{\cos u}{\mathrm{K}}.$$

Quant à la torsion, remarquons d'abord que les cosinus directeurs de la binormale à (M_1), en M_1, sont

$$\mathrm{A} = \sin u, \qquad \mathrm{B} = \cos\alpha\cos u, \qquad \mathrm{C} = -\sin\alpha\cos u.$$

Conséquemment, en tenant compte de (4), on a $\partial\mathrm{A} = 0$, et

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\mathrm{B}}{ds} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial\mathrm{C}}{ds} = \frac{\cos\alpha\sin u}{\rho} + \frac{\cos u}{r}.$$

On en déduit

$$(9) \qquad \frac{\mathrm{K}}{r_1} = \frac{\cos\alpha\sin u}{\rho} + \frac{\cos u}{r},$$

ou bien, en vertu de (3),

$$(10) \qquad \frac{l}{r_1} = \frac{\sin u}{\mathrm{K}}.$$

L'élimination de s, entre (6), (8), (10), conduit aux équations intrinsèques de (M_1).

Remarquons, en passant, que (8) et (10) se déduisent des égalités (3) par le changement de K en $\frac{1}{K}$ et de α en π. Remarquons encore que la combinaison de (10) avec (3) donne lieu aux relations

$$rr_1 \sin^2 u = l^2, \qquad r_1 = K^2 r,$$

dont la première a été signalée par M. Pellet.

Soient φ et φ_1 les angles de (M) et (M₁) avec les génératrices de leurs développables rectifiantes. Si l'on divise (7) par (9), on obtient sans peine la formule

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - u) = \cos\alpha \operatorname{tang}\varphi,$$

qui va nous servir à chercher, avec M. Pellet, quelle doit être (M) pour que (M_1) soit une droite D. Il faut évidemment que l'on ait $\varphi_1 = 0$ et, par suite,

$$\operatorname{tang} u = \frac{r}{\rho} \cos\alpha;$$

puis, par comparaison avec (5),

(11) $$\rho \sin^2 u = l \cos\alpha.$$

Cela étant, la formule (4) donne

$$s \sin\alpha = -\int \rho \, du = l \cos\alpha \cot u,$$

d'où, successivement,

(12) $$s \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} u = l, \qquad r \sin^2 u = \frac{l^2}{s \operatorname{tang}\alpha}.$$

Il suffit, maintenant, d'éliminer u entre (11) et (12) pour avoir les équations intrinsèques de (M). On obtient

$$\rho = l \cos\alpha + \frac{s^2 \sin^2\alpha}{l \cos\alpha}, \qquad \frac{r}{\rho} = \frac{l}{s \sin\alpha}.$$

La seconde équation nous dit que (M) est géodésique sur un certain cône, dont le sommet est évidemment le point de rencontre du plan rectifiant avec la droite D. Remarquons que cette droite est toujours perpendiculaire à MM_1, et, par suite, le point M reste à la distance l de D. Autrement dit, la ligne (M) est tracée sur un cylindre de révolution dont D est l'axe et l le rayon. Quelle est la transformée de (M) lorsqu'on déploie le cylindre sur un plan? Rappelons que, si l'on enroule sur un cylindre de révolution, de rayon l, le plan d'une ligne, la nouvelle valeur de la flexion est donnée par la formule

$$(13) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{\cos^4\theta}{l^2},$$

θ étant l'angle des tangentes avec les droites du plan, qui se transforment en cercles. Si la ligne plane est une chaînette de paramètre k, de sorte que

$$\rho_0 = k + \frac{s_0^2}{k},$$

on a

$$\rho_0 \cos^2\theta = k,$$

pourvu qu'on enroule la directrice suivant un cercle. La formule (13) donne

$$\rho = \frac{l\rho_0}{\sqrt{l^2 + k^2}}.$$

D'ailleurs $s_0 = s$. Donc

$$\rho = \frac{l}{\sqrt{l^2 + k^2}}\left(k + \frac{s^2}{k}\right).$$

Cette équation coïncidera avec la première équation intrinsèque de (M), si l'on prend $k = l \cot \alpha$. On obtient donc la ligne (M) en enroulant sur un cylindre de révolution, de rayon l, une chaînette de paramètre $l \cot \alpha$, en ayant soin de diriger l'axe de la courbe suivant les génératrices du cylindre. La directrice se transforme alors en une circonférence, ayant pour centre le sommet du cône rectifiant de la courbe considérée.