NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

D. COELINGH

Transformation de figures analogue à la transformation par rayons vecteurs réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 133-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__133_1>

TRANSFORMATION DE FIGURES ANALOGUE A LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

PAR M. D. COELINGH, d'Amsterdam.

Après avoir étudié la transformation suivante, j'ai lu, dans les *Nouvelles Annales* de 1882, le Mémoire de M. Laguerre : *Transformation par semi-droites réciproques*. Bien que les principes qui servent de base à mes considérations soient tout à fait différents de ceux de M. Laguerre, la transformation n'en diffère pas essentiellement. C'est pour cela que je me bornerai ici à signaler ces principes, à développer quelques propriétés que M. Laguerre n'a pas données aussi générales qu'il est possible, et à faire quelques applications.

Propriété relative à une droite et à une circonférence.

Si l'on mène d'un point P (*fig.* 1) sur une droite XX' deux tangentes à une circonférence O, on aura

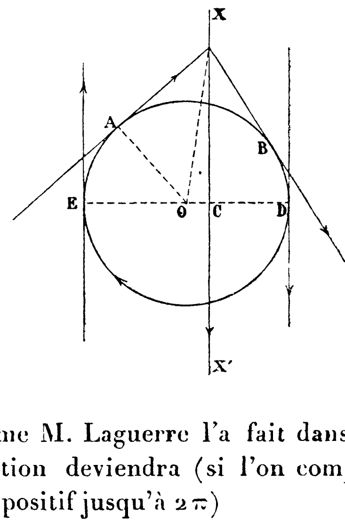
$$\sin \mathrm{APO} = \mathrm{AO} : \mathrm{OP}, \qquad \sin \mathrm{CPO} = \mathrm{OC} : \mathrm{OP},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{APC}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{BPC}} = \frac{\mathrm{AO}+\mathrm{OC}}{\mathrm{AO}-\mathrm{OC}}.$$

Si, pour définir les angles d'une manière précise, on suppose donné sur toutes les droites un sens positif et qu'on ne considère donc que des *semi-droites* et des

Fig. 1.



cycles, comme M. Laguerre l'a fait dans le Mémoire cité, la relation deviendra (si l'on compte les angles dans le sens positif jusqu'à 2π)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{XX'}, \mathrm{AP})\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{XX'}, \mathrm{PB}) = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{EC}}.$$

Cette relation ne dépend plus de la position de P sur XX' : ainsi, le produit des tangentes des moitiés des angles est constant, quelle que soit la position de P sur XX′.

Le théorème est analogue au théorème connu, d'où résulte la définition de la puissance d'un point par rapport à une circonférence.

DC et EC sont les distances à XX′ des tangentes de O, qui font avec XX′ des angles égaux à zéro et à π. La relation subsiste pour toute droite et tout cycle si l'on compte les distances DC, EC positives, lorsqu'elles sont dirigées vers le centre, négatives si elles sont dirigées en sens opposé.

Le quotient $\frac{DC}{EC}$ sera appelé le *rapport de la semi-droite relativement au cycle* ou celui *du cycle relativement à la semi-droite;* il est positif ou négatif à mesure que la semi-droite coupe le cycle ou non; il est zéro si la semi-droite est une tangente, infini si elle n'en diffère que par le sens; il est égal à l'unité si la semi-droite est diamètre, — 1 si le cycle est infiniment petit, c'est-à-dire se réduit à un point.

Définitions. — Théorèmes fondamentaux.

1. Deux semi-droites sont dites *inverses* par rapport à une semi-droite fixe, nommée *axe,* et suivant une constante λ, si elles se rencontrent dans l'axe et que les angles φ et φ' entre l'axe et les semi-droites soient tels que

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' = \lambda.$$

Si les semi-droites sont parallèles à l'axe, elles seront de sens contraires, et le rapport de leurs distances à l'axe sera égal à la constante de l'inversion.

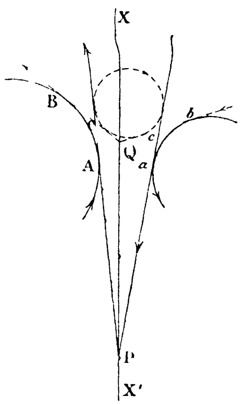
Pour l'inversion, une courbe sera considérée comme l'enveloppe de ses tangentes.

2. Deux semi-droites et leurs inverses sont tangentes à un même cycle.

3. La tangente commune à deux courbes et celle commune aux inverses sont égales, mais de sens contraires.

En effet, si l'on mène par un point P de l'axe (*fig.* 2)

Fig. 2.



les tangentes aP et PA à deux courbes inverses et par un point Q les tangentes voisines bQ et QB, on aura (n° 2)

$$PC + QC = cP + cQ,$$

d'où l'on déduit à la limite

$$2PA = 2aP.$$

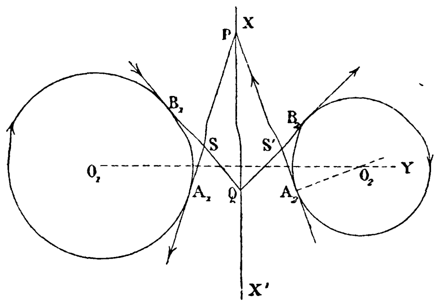
De ce lemme, le théorème énoncé suit immédiatement.

Remarque. — M. Laguerre a démontré ce théorème, par le calcul, dans le cas spécial où les deux courbes sont des cycles (*Nouvelles Annales*, p. 552; 1882).

4. La figure inverse d'un cycle est un autre cycle, l'axe de l'inversion est l'axe radical des deux cycles.

Si la constante de l'inversion est telle que A_2P (*fig.* 3) est l'inverse de PA_1, le cycle, qui a son centre sur

Fig. 3.



O_1Y perpendiculaire à XX' et qui touche A_2P en A_2 ($A_2P = PA_1$), sera l'inverse; en effet, deux tangentes B_1Q et QB_2 seront inverses l'une de l'autre, parce que le quadrilatère $PSQS'$ est circonscriptible.

5. Deux cycles étant donnés, on peut toujours passer de l'un à l'autre par une *inversion tangentielle* et par une seule (avec cette restriction que le sens de l'axe est indéterminé). Le rapport de cette inversion sera nommé le *rapport d'un cycle relativement à l'autre*, PA_1 et A_2P seront dites des *tangentes correspondantes*.

6. Si, dans la *fig.* 3, on mène les tangentes à O_1 et O_2, parallèles à XX', on démontre facilement que

$$\lambda_{1,2}^2 = \lambda_1 \lambda_2,$$

si l'on désigne par $\lambda_{1,2}$ la constante de l'inversion, par λ_1 et λ_2 les rapports de XX' relativement aux cycles O_1 et O_2.

De là résulte

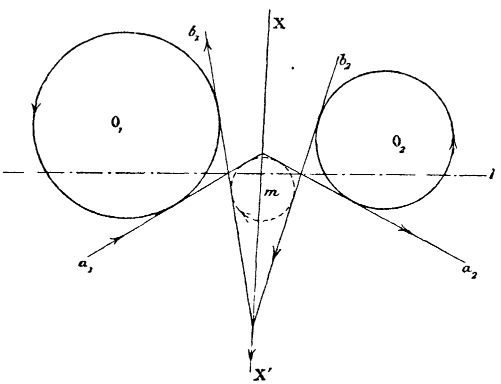
$$\text{pour } \lambda_{1,2}^2 = -\lambda_1, \qquad \lambda_2 = -1.$$
$$\text{pour } \lambda_{1,2}^2 = \lambda_1, \qquad \lambda_2 = 1,$$

c'est-à-dire que, si l'axe d'inversion ne coupe pas le cycle, on peut choisir la constante de l'inversion telle que le cycle inverse se réduise à un point; si l'axe d'inversion coupe le cycle, on peut choisir la constante telle que l'axe devienne diamètre du cycle inverse.

Axes et centres de similitude.

7. Deux cycles O_1 et O_2 (*fig.* 4) ont même rapport relativement à une droite l, qui joint le point de rencontre de deux tangentes de O_1 au point de concours

Fig. 4.



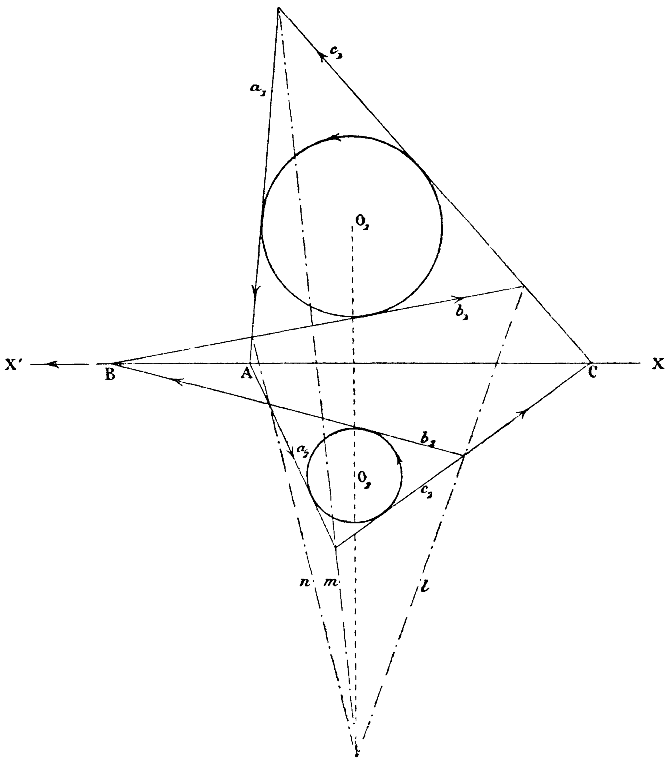
des tangentes correspondantes de O_2 : en effet, en inversant autour de l'axe l, tellement que le cycle inscrit m coïncide avec son inverse, les cycles O_1 et O_2 coïncident aussi avec leurs inverses.

Une semi-droite, qui a même rapport relativement à quelques cycles, sera appelée *axe de similitude* de ces cycles.

La réciproque du théorème est vraie.

8. Trois tangentes de O_1 (*fig.* 5) et leurs correspondantes de O_2 forment des triangles, tels que les points

Fig. 5.



de concours des côtés deux à deux sont en ligne droite : les droites l, m, n (axes de similitude) qui joignent les sommets deux à deux concourent donc en un point. Si l'on fait varier les triangles en conservant les droites l et m, la troisième droite n passera toujours, en restant axe de similitude, par le point de rencontre de l et m. De là on déduit facilement que l'enveloppe de tous les axes de similitude de deux cycles est un point : ce point est nommé *centre de similitude.*

La centrale et les tangentes communes aux deux cycles sont des axes de similitude; elles passent par le centre de similitude.

9. Trois cycles ont deux à deux trois centres de similitude. La droite, qui joint deux d'entre eux, aura même rapport relativement aux trois cycles et passera donc par le troisième centre : ces centres sont en ligne droite; c'est le seul axe de similitude.

Il y a une infinité de cycles qui ont même rapport à cet axe; l'ensemble de ces cycles sera nommé un *système de cycles.*

Les cycles communs à deux systèmes sont encore en nombre infini; l'ensemble de ces cycles sera nommé un *faisceau de cycles.*

Toute paire de cycles d'un faisceau a les mêmes deux axes de similitude; toutes les paires ont donc même centre de similitude : c'est le centre de similitude du faisceau.

Le centre de similitude est le cycle infiniment petit du faisceau.

Les centres des cycles d'un faisceau sont en ligne droite, car la droite qui joint le centre de similitude au centre d'un cycle est diamètre de tous.

Si le centre de similitude est intérieur aux cycles, tous les axes de similitude ont un rapport positif (faisceau positif).

Si le centre de similitude est extérieur aux cycles,

les tangentes, menées par ce point à un cycle du faisceau, seront tangentes à tous les cycles du faisceau (faisceau négatif).

Longueur de tangentes communes à deux cycles. Inversion de systèmes et de faisceaux.

10. Un cycle tangent à deux paires de tangentes correspondantes de deux autres cycles a, aux deux cycles, des *distances tangentielles* égales (*voir* le Mémoire cité, p. 544); il a, relativement à l'axe radical, un rapport égal au rapport d'un des cycles relativement à l'autre.

En effet, la démonstration résulte immédiatement de l'inversion qui fait passer O_1 en O_2, si du moins on fait attention au théorème du n° 3.

Les réciproques sont vraies.

11. Tous les cycles, qui ont à deux cycles donnés des distances tangentielles égales, forment donc un système; l'axe radical des deux cycles est l'axe de similitude du système.

12. De cela on déduit facilement, en faisant attention au n° 3, que la figure inverse d'un système est encore un système de cycles.

13. Le faisceau, étant l'intersection de deux systèmes, a pour figure inverse un autre faisceau.

Cas particuliers. — 1° En vertu du n° 6, on peut toujours réduire un faisceau négatif, par l'inversion tangentielle, à une série de points en ligne droite; l'axe de l'inversion sera un axe de similitude qui ne coupe pas les cycles. C'est à ce cas spécial, ou plutôt au cas analogue du *système* de cycles, que M. Laguerre fait allusion (p. 552 du Mémoire cité).

2° On peut toujours réduire un faisceau positif, par l'inversion, à un groupe de cycles concentriques. En effet, si l'axe d'inversion est un axe de similitude, on peut toujours choisir la constante de telle sorte que tous les centres dans la figure inverse se trouvent sur l'axe (n° 6); de plus, si cet axe d'inversion est pris perpendiculaire à la centrale du faisceau, tous les centres se confondent.

Remarque. — Le centre de similitude du faisceau inverse n'est pas l'inverse du centre, mais d'un cycle du faisceau donné.

14. A l'aide du théorème du n° 10 et de ses réciproques, on démontre facilement : si deux cycles m_1 et m_2 d'un faisceau ont chacun des distances tangentielles égales à deux cycles donnés O_1 et O_2, tout cycle du faisceau a des distances tangentielles égales à O_1 et O_2.

15. Si l'on considère O_1 et O_2 comme deux positions arbitraires d'un cycle mobile, le théorème peut s'énoncer ainsi :

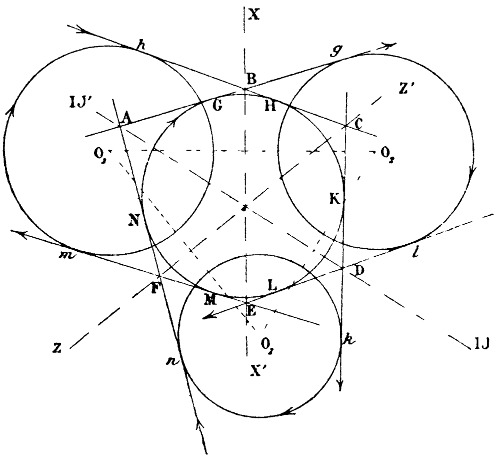
Si un cycle mobile a une distance tangentielle constante à deux cycles d'un faisceau, il a à tout cycle du faisceau une distance constante et (puisque deux de ces distances peuvent s'évanouir) il touche, en général, deux cycles fixes du faisceau.

Ces cycles fixes peuvent facilement être construits à l'aide d'une inversion du n° 13.

16. Les cycles, qui ont des distances tangentielles

égales à *trois* cycles donnés O_1, O_2, O_3 (*fig.* 6), forment un faisceau, intersection de deux systèmes du

Fig. 6.



n° 11 ; le centre radical des trois cycles est le centre de similitude du faisceau([1]).

17. S'il s'agit donc de construire les cycles qui soient tangents à trois cycles donnés, il faudra les chercher dans ce faisceau : la solution de cette question (connue sous le nom de *problème d'Apollonius*) a été indiquée déjà au n° 15.

S'il s'agit de la question plus générale de décrire un

([1]) On peut encore déduire de la *fig.* 6 une démonstration facile du théorème de Brianchon : si l'on prolonge les côtés de l'hexagone circonscrit ABCDEF jusqu'à ce qu'on ait

$$Gg = Hh = Kk = Ll = Mm = Nn,$$

et que l'on construise ensuite les trois cycles qui touchent en h, m, en g, l, en k, n les côtés opposés de l'hexagone, les diagonales XX', YY', ZZ' seront les axes radicaux de ces trois cycles.

cycle qui ait, à trois cycles donnés, des distances tangentielles égales et données, on peut, par les inversions du n° 13, réduire la question à une des suivantes :

Trouver sur une droite donnée un point tel, que la tangente, menée de ce point à un cycle donné, soit d'une longueur donnée;

ou

Décrire d'un point donné comme centre un cycle qui ait à un cycle donné une distance tangentielle donnée.

Ces questions sont assez faciles à résoudre. Elles comportent au plus deux solutions.

Systèmes de tangentes à un cycle.

18. Le rapport anharmonique de quatre tangentes d'un cycle est égal au rapport anharmonique des inverses.

En effet, ce rapport étant le rapport anharmonique constant des quatre points de rencontre d'une tangente arbitraire avec les tangentes considérées, si l'on prend pour les deux tangentes arbitraires des tangentes correspondantes (n° 5), il est clair, d'après la *fig.* 5, que les deux séries de quatre points sont les perspectives l'une de l'autre, le centre de similitude étant le centre de la perspective [1].

---

[1] On peut aussi démontrer ce théorème en évaluant en fonction des angles de la figure inverse le *rapport double*

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(3,1)}{\sin\frac{1}{2}(3,2)} : \frac{\sin\frac{1}{2}(4,2)}{\sin\frac{1}{2}(4,2)},$$

(3, 1), ... désignant l'angle entre les tangentes 3 et 1.....

19. Un système de paires de tangentes d'un cycle étant dit *en involution* si le rapport anharmonique de quatre tangentes quelconques est égal à celui des tangentes conjuguées, il s'ensuit du théorème du n° 18 qu'un système de tangentes sera en involution si les points de rencontre des tangentes conjuguées sont en ligne droite. De plus, on démontre facilement qu'il n'existe pas d'autres systèmes en involution.

20. De cela, il est évident que les paires de tangentes communes à un cycle d'un système et à tous les autres cycles du même système sont en involution. De même, les paires de tangentes communes à un cycle quelconque et aux angles d'un faisceau.

21. Il peut se présenter (lorsque l'*axe* de l'involution coupe le cycle) que deux tangentes conjuguées se confondent en une seule, nommée *tangente double*. Cela posé, on déduit facilement du théoreme du n° 13 :

L'enveloppe des tangentes doubles de tous les systèmes de tangentes en involution, déterminés par un faisceau de cycles et par un cycle mobile, qui reste à des distances tangentielles constantes de deux, *et par conséquent de* tous *les cycles du faisceau, est composée de deux cycles du faisceau.*

22. Remarquons, en dernier lieu, l'analogie entre la transformation par rayons vecteurs réciproques et l'inversion tangentielle, et celle entre les propriétés déduites à l'aide des deux transformations. Cette analogie est complète; en effet, les théorèmes démontrés ci-dessus ont leurs correspondants et l'on n'a, pour les trouver, plus rien à faire qu'à remplacer dans les énoncés donnés les *tangentes d'un cycle* par les *points*, le *rapport d'une*

semi-droite par *la puissance d'un point*, la *longueur d'une tangente* par la *grandeur d'un angle*, l'*axe et le centre radical* par le *centre et l'axe de similitude* (et réciproquement), les *groupes de cycles à centre et à axe de similitude* par les *groupes à axe et à centre radical*.

On peut poursuivre plus loin cette analogie en cherchant : 1° la relation (α) entre les rayons vecteurs d'un point origine aux points d'une circonférence : 2° la relation (β) entre les angles entre un axe fixe et la tangente d'un cycle, pour qu'une circonférence et un cycle aient pour figures transformées une autre circonférence et un autre cycle.

En désignant par A la distance du point origine au centre, par R le rayon de la circonférence, par x le rayon vecteur, par y celui de la figure transformée, on trouve

$$(\alpha) \qquad \frac{x}{A} + \frac{A^2 - R^2}{Ax} = C_1 y + \frac{C_2}{y},$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires qui définissent la circonférence transformée.

De même, en désignant par a la distance de l'axe fixe au centre, par r le rayon du cycle, par φ et χ les angles entre l'axe fixe et deux tangentes inverses, on trouve

$$\frac{r - a\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{k_1 - k_2\cos\chi}{\sin\chi},$$

relation qui, en posant $\tang\frac{1}{2}\varphi = x$, $\tang\frac{1}{2}\chi = y$, devient

$$(\beta) \qquad (r - a)x \quad \frac{r-a}{x} = K_1 y + \frac{K_2}{y}.$$

Les relations (α) et (β) sont identiques pour

$$A^2 - R^2 = \frac{r-a}{r+a},$$

c'est-à-dire les transformations (α) et (β) sont correspondantes deux à deux, et l'on déduit l'une de l'autre en remplaçant la distance de deux points par la tangente de la moitié de l'angle entre deux semi-droites, et la puissance d'un point par le rapport d'une semi-droite relativement à un cycle.