NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FRITZ HOFMANN

La solution géométrique de l’équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 120-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__120_0>

LA SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ [1];

PAR M. FRITZ HOFMANN.

Étant donnée une équation générale du quatrième degré

$$(\mathrm{A}) \qquad a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4 = 0,$$

on peut faire la substitution $z = \frac{x}{y}$, ce qui donne

$$(\mathrm{B}) \quad a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 4a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^3 + 6a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4a_3 \frac{x}{y} + a_4 = 0.$$

L'équation (B) représente l'ensemble de quatre droites menées par l'origine : $\frac{x}{y} = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3$; si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont les racines de l'équation (A).

Le faisceau (B) coupe en quatre points distincts la parabole

$$(\mathrm{C}) \qquad y^2 - x = 0,$$

menée par l'origine (abstraction faite du point commun situé dans l'origine même, nous l'excluons comme non essentiel pour notre problème).

On peut chercher l'équation d'une section conique D qui passe par les quatre points mentionnés, c'est-à-dire, les quatre points d'intersection *essentiels* de B et C. Cette équation D contiendra une constante arbitraire,

---

(1) Sur les méthodes employées dans les lignes suivantes, comparer SALMON, *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, art. 209 (172).

puisque la section conique D n'est pas encore déterminée par quatre points. La forme de l'équation D une fois trouvée, on pourra interpréter la solution de l'équation (A) ou (B) comme la détermination des quatre points d'intersection des deux sections coniques C et D, et nous verrons que c'est justement la *mobilité* de la section conique D qui facilite la détermination de ces quatre points communs.

En employant encore les lettres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 pour désigner les racines encore inconnues de l'équation (A), on peut d'abord donner une liste de ces quatre points d'intersection de B et C.

De $\frac{x}{y} = \lambda_1$ on tire $x = \lambda_1 y$ et, en substituant dans C,

$$y^2 - \lambda_1 y = 0.$$

En supprimant la racine $y = 0$ (qui nous ramènerait à l'origine), nous avons $y = \lambda_1$, ce qui donne $x = \lambda_1^2$. Donc le point ($x = \lambda_1^2$, $y = \lambda_1$) est situé en même temps sur la droite menée par l'origine $\frac{x}{y} = \lambda_1$ et sur la parabole

$$(C) \qquad y^2 - x = 0.$$

On a donc, pour coordonnées des quatre points d'intersection du faisceau (B) et de la section conique (C),

$$x = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \lambda_4^2,$$
$$y = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4;$$

il s'agit maintenant de former l'équation (D) d'une section conique, mobile en quelque sorte, qui passe par les quatre points énumérés.

En supposant l'équation (D) de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

les six coefficients doivent satisfaire à quatre conditions, que l'on formera en introduisant dans cette équation les quatre couples λ_i^2, λ_i formés au moyen des quatre racines λ_i.

Il faut donc qu'on ait ($x = \lambda_i^2$, $y = \lambda_i$)

$$(\Delta) \qquad A\lambda_i^4 + B\lambda_i^3 + (C + D)\lambda_i^2 + E\lambda_i + F = 0$$

($i = 1, 2, 3, 4$), où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *sont les racines de l'équation* (A) *ou* (B). Mais, puisque

$$(B) \qquad a_0\lambda_i^4 + 4a_1\lambda_i^3 + 6a_2\lambda_i^2 + 4a_3\lambda_i + a_4 = 0$$

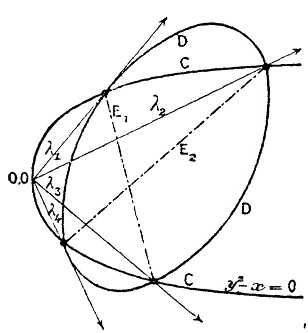
($i = 1, 2, 3, 4$) est une identité, l'équation Δ est satisfaite identiquement en posant

$$A = a_0, \quad B = 4a_1, \quad C + D = 6a_2, \quad E = 4a_3, \quad F = a_4,$$

et l'équation cherchée est de la forme

$$(D) \quad a_0x^2 + 4a_1xy + \mu y^2 + (6a_2 - \mu)x + 4a_3y + a_4 = 0.$$

C'est là la section conique D qui passe par les quatre points d'intersection du faisceau B et de la parabole C (voir la figure).



Nous donnons une vérification *a posteriori* des propriétés de la section conique D.

En supposant données les équations $D = 0$, $C = 0$, on peut en déduire directement une équation qui existe entre les quatre rapports $\frac{x}{y}$, pris relativement aux quatre points d'intersection des deux sections coniques C et D; car, si x, y est un point commun à C et D, on a le système

$$\begin{aligned} 0 &= y^2.1 - x.1 + 0.1, \\ 0 &= 0.1 + y^2.1 - x.1, \\ 0 &= (a_0x^2 + 4a_1xy + \mu y^2).1 \\ &\qquad + [(6a_2 - \mu)x + 4a_3y].1 + a_4.1, \end{aligned}$$

et, en éliminant la valeur 1, on voit que

$$0 = \begin{vmatrix} y^2 & -x & 0 \\ 0 & y^2 & -x \\ a_0x^2 + 4a_1xy + \mu y^2 & (6a_2 - \mu)x + 4a_3y & a_4 \end{vmatrix}.$$

On trouve comme résultat

$$\begin{aligned} a_4y^4 + a_0x^4 + 4a_1x^3y + \mu x^2y^2 \\ + (6a_2 - \mu)x^2y^2 + 4a_2y^3x = 0, \end{aligned}$$

condition qui est remplie par les quatre directions $\frac{x}{y}$ des droites menées par l'origine aux quatre points d'intersection de C et D. On voit que c'est bien encore l'équation (B) de laquelle nous sommes partis.

Après nous être assurés que la section conique D passe par les points d'intersection du faisceau B et de la parabole C, nous voyons que notre problème, la solution de l'équation (A) ou (B), est ramené à la détermination des quatre points d'intersection de C et D.

Quant à l'équation (D) elle-même, on peut la mettre sous la forme

$$(a_0x^2 + 4a_1xy + 6a_2x + 4a_3y + a_4) + \mu(y^2 - x) = 0,$$

où l'on voit distinctement que la forme de la section conique D se modifie selon les valeurs arbitraires que l'on attribuera à la constante μ.

C'est ici le point qui met en évidence le but et les avantages de notre procédé géométrique : la transformation de notre équation proposée (A) en un problème de Géométrie du même degré de complication ne constituerait pas encore un progrès essentiel quant à la solution effective de l'équation; c'est seulement la présence de la constante μ qui nous fournit le moyen de *simplifier* la configuration géométrique.

On sait que le *discriminant* d'une section conique décide la question si son équation est séparable en deux facteurs linéaires ou non; or, le discriminant de la section conique D contiendra toujours la constante μ, et, en choisissant la valeur de μ telle que le discriminant s'évanouisse, la section conique D dégénère en *un couple de droites*. La détermination du centre, du point commun, de ce couple est un problème du premier degré; la séparation des deux droites E_1, E_2 qui composent la section conique dégénérée est un problème du deuxième degré. En faisant couper par chacune des deux droites E_1, E_2 la parabole

$$\text{(C)} \qquad y^2 - x = 0,$$

il reste encore deux fois une équation du deuxième degré à résoudre qui, finalement, nous fournit les coordonnées x, y des deux points d'intersection avec la parabole, relatifs à chacune des droites E_1 et E_2 mentionnées.

Ajoutons que l'application exacte des résultats géométriques énoncés dans les dernières lignes serait encore un petit détour, puisque, pour notre problème, il ne s'agit pas de l'évaluation des points d'intersection de D et C, mais seulement de la détermination des quatre *directions* $\frac{x}{y}$; nous préférerons donc employer l'équation quadratique qui existe pour $\frac{x}{y}$, quand une section conique

$$(C) \qquad y^2 - x = 0$$

et une droite

$$(E) \qquad ax + by + c = 0$$

se coupent en un point (x, y) : de

$$\begin{aligned}(ax + by) + c.1 &= 0,\\ y^2 - x.1 &= 0\end{aligned}$$

on conclut, par l'élimination de 1,

$$\begin{vmatrix} ax + by & c \\ y^2 & -x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Comme résultat final, nous avons à résoudre géométriquement l'équation (A); nous voyons d'abord encore une fois que cette solution dépend d'une équation du troisième degré, ce qui est connu pour toutes les méthodes algébriques.

Cette équation du troisième degré (le discriminant d'une section conique) fournit par ses trois racines μ les trois points d'intersection des trois couples de droites qu'on peut mener par quatre points, inconnus séparément, mais qui sont définis comme points communs à deux sections coniques données.

L'équation du troisième degré résolue, il reste encore la solution de deux équations du deuxième degré pour donner les racines $\frac{x}{y}$ de l'équation (B) ou les z de l'équation (A) en forme ou valeur définitive.

Table des procédés géométriques à suivre pour la solution d'une équation du quatrième degré.

I. Former l'équation de la section conique

$$D = (a_0x^2 + 4a_1xy + 6a_2x + 4a_3y + a_4) + \mu(y^2 - x).$$

II. Former le discriminant de D, savoir

$$(F)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & \left(3a_2 - \frac{\mu}{2}\right) \\ 2a_1 & \mu & 2a_3 \\ \left(3a_2 - \frac{\mu}{2}\right) & 2a_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

l'égaler à zéro, trouver *une* racine μ_1 de l'équation $F = 0$.

III. Former

$$D_1 = (a_0x^2 + 4a_1xy + 6a_2x + 4a_3y - a_4) + \mu_1(y^2 - x),$$

à l'aide de cette valeur déterminée μ_1 de μ.

La section conique D dégénère en un couple de droites, d'après la théorie des discriminants.

IV. Séparer les deux facteurs linéaires

$$E_1 = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$E_2 = a_2x + b_2y + c_2,$$

dont D_1 se compose, par la solution d'une équation quadratique.

V. Les valeurs de $\frac{x}{y}$ tirées des deux équations

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0,$$
$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0$$

sont les racines de l'équation proposée.

Exemple I. — Soit proposée l'équation

$$(A)\qquad x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0,$$

où

$$a_0 = 1, \quad 4a_1 = -4, \quad 6a_2 = -1, \quad 4a_3 = 16, \quad a_4 = -12.$$

La section conique D est donnée par

$$(D)\qquad x^2 - 4xy - x + 16y - 12 + \mu(y^2 - x) = 0.$$

Elle doit passer par les points d'intersection du faisceau

$$(B)\qquad \left(\frac{x}{y}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16\left(\frac{x}{y}\right) - 12 = 0,$$

avec la parabole

$$(C)\qquad y^2 - x = 0.$$

Vérifions : soit x, y un point commun à C et D; nous pouvons établir directement une équation pour le rapport $\frac{x}{y}$ de la manière suivante : mettons $\mu = 0$ dans l'expression de D, les points d'intersection avec C resteront les mêmes; c'est-à-dire qu'on a, pour notre x et y,

$$\begin{aligned}(x^2 - 4xy).1 + (-x + 16y).1 - 12.2 &= 0,\\ y^2.1 - x.1 + 0.1 &= 0,\\ 0.1 + y^2.1 - x &= 0.\end{aligned}$$

En éliminant 1, on trouve

$$\begin{vmatrix} x^2 - 4xy & -x + 16y & -12 \\ y^2 & -x & 0 \\ 0 & y^2 & -x \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$x^4 - 4x^3y - x^2y^2 + 16xy^3 - 12y^4,$$

ce qui s'accorde identiquement avec B.

Formons le discriminant F :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\right) \\ -2 & \mu & 8 \\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\right) & 8 & -12 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui nous donne une équation du troisième degré pour μ.

Elle a trois racines $\mu = 0, 3, -5$; la connaissance d'une seule nous suffirait pour donner une solution complète. Les substitutions $\mu = 0, 3, -5$ dans la forme de D feront dégénérer D trois fois en un couple de droites :

$\mu = 0$ change D en $(4y - x - 3)(-x + 4)$,
$\mu = 3$ » $(-x + 3y + 2)(-x + y + 6)$,
$\mu = -5$ » $(x + y - 2)(x - 5y + 6)$.

Pour déduire (¹) une de ces formules, prenons $\mu = -5$. D se change en

$$(D_1) \qquad x^2 - 4xy - 5y^2 + 16y + 4x - 12 = 0;$$

il s'agit d'opérer la séparation des deux droites représentées par D_1.

Le centre x', y' du couple D est défini comme satisfaisant aux trois équations du discriminant F :

$$\begin{aligned} x' - 2y' + 2 &= 0, \\ -2x' - 5y' + 8 &= 0, \\ x' + 8y' - 12 &= 0. \end{aligned}$$

On voit que c'est le point $x' = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$.

(¹) Pour une méthode très générale de séparer les droites d'un couple, *voir* Clebsch-Lindemann, *Leçons de Géométrie*, traduites par A. Benoist, Chap. II, n° 3 : *Sur les couples de droites*.

En mettant $x=0$ dans $D_1=0$, on voit paraître les deux points d'intersection du couple $D_1=0$ avec l'axe $x=0$. L'équation du deuxième degré ($D_1=0$, $x=0$),

$$(D'_1)\qquad -5y^2+16y-12=0,$$

a pour racines $x=0$, $y=2$, $y=\frac{6}{5}$.

Ainsi nous avons les moyens de former effectivement les deux équations (E_1) et (E_2) qui composent D_1. La droite E_1 joindra le centre $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ au point $0, 2$; son équation est

$$(E_1)\qquad x+y-2=0;$$

la droite E_2 joindra le même point $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ à l'autre point sur l'axe des y : 0, $\frac{5}{6}$; son équation est

$$(E_2)\qquad x-5y+6=0.$$

On ne cherchera pas, d'après ce que nous venons de dire dans une parenthèse, les points d'intersection mêmes de E_1 et E_2 avec $C : y^2-x=0$; il suffit de connaître les quatre *directions* qu'ils déterminent avec l'origine et qui ont les quatre *rapports* $\frac{x}{y}$ pour mesure.

En éliminant 1 entre E_1 et $C : y^2-x=0$, on a

$$\begin{vmatrix} x+y & -2 \\ y^2 & -x \end{vmatrix}=0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=\begin{cases}+1\\-2\end{cases},$$

et de même en éliminant entre E_2 et C :

$$\begin{vmatrix} x-5y & 6 \\ y^2 & -x \end{vmatrix}=0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}.$$

On voit que l'équation proposée a pour racines 1, 2, -2, 3.

Les deux autres valeurs de μ, qui servent à *fendre* D, donneront encore deux équations du deuxième degré.

EXEMPLE II :

$$(A)\qquad \frac{1}{6}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 12 = 0,$$

$$(B)\qquad \frac{1}{6}\left(\frac{x}{y}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 12 = 0,$$

$$(D)\qquad \frac{1}{6}x^2 + 2xy - 6x - 12 + \mu(y^2 - x) = 0.$$

$$(F)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 3 - \frac{\mu}{2} \\ 1 & \mu & 0 \\ 3 - \frac{\mu}{2} & 0 & -12 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mu = 2,\quad 4,\quad 6.$$

Choisissons $\mu = 2$. Nous avons d'abord

$$(D_1)\qquad \frac{1}{6}x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 12 = 0.$$

le centre se trouve, d'après F : $x = 6$, $y = -3$. En faisant $x = 0$, l'équation (D_1) donne

$$x = 0, \qquad y = \pm\sqrt{6}.$$

Donc

$$(E_1)\qquad \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(E_1)\qquad x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 2y\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0,$$

$$(E_2)\qquad x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - y2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0.$$

Choisissons

$$(E_1)\qquad x(\sqrt{3}\quad \sqrt{2}) - y\,2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0,$$

pour déterminer deux racines de A :

$$\begin{vmatrix} x(\sqrt{3}+\sqrt{2})+y\,2\sqrt{3} & -6\sqrt{2} \\ y^2 & -x \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})+xy\,2\sqrt{3}-y^2 6\sqrt{2}=0,$$

ou

$$\frac{x}{y}=\sqrt{6}-3\pm\sqrt{3}.$$

De même E_2 aurait donné

$$\frac{x}{y}=-\sqrt{6}-3\pm\sqrt{3}.$$

Note. — Il est aisé de former la condition pour que les sections coniques C et D *se touchent* en un point x, y. Cette condition sera indépendante de μ; nous écrirons donc D sous la forme spéciale

$$a_0x^2+4a_1xy+6a_2x+4a_3y+a_4=0.$$

Quand un tel point x, y existe, on exprimera : 1° qu'il est situé sur les deux sections coniques C et D; 2° que le rapport des trois coordonnées homologues de sa tangente, formée deux fois, pour chacune des sections coniques C et D, est une constante ρ.

On a d'abord

$$(\alpha) \qquad y^2-x=0,$$
$$(\beta) \qquad a_0x^2+4a_1xy+6a_2x+4a_3y+a_4=0,$$

ou

$$(\alpha) \qquad (-1)x+(2y).y+(-x).1=0,$$
$$(\beta) \quad \begin{cases} (a_0x+2a_1y+3a_2).x \\ \quad +(2a_1x+2a_3y)+(3a_2x+2a_3y+a_4).1=0. \end{cases}$$

La condition pour l'existence d'un rapport constant ρ entre les coordonnées (coefficients) homologues des deux tangentes de x, y, prises par rapport à C et D, donne les trois équations suivantes :

$$(\gamma) \qquad -1 = \rho(a_0 x + 2a_1 y + 3a_2),$$
$$(\delta) \qquad 2y = \rho(2a_1 x + 2a_3),$$
$$(\varepsilon) \qquad -x = \rho(3a_2 x + 2a_3 y + a_4).$$

En multipliant γ, δ, ε respectivement par x, y, 1 et en ajoutant, on voit que, des deux équations (α) et (β), l'une est satisfaite quand l'autre et le système γ, δ, ε sont remplis. Donc on peut supprimer β.

En éliminant ρ entre γ, δ et δ, ε, nous avons finalement le système de trois équations entre lesquelles il s'agira d'éliminer x et y :

$$(\alpha) \quad \text{I.} \qquad y^2 - x = 0,$$
$$(\gamma\delta) \quad \text{II.} \qquad (2a_3 + 4a_1 y^2 + 6a_2 y) + x(2a_1 + 2a_0 y) = 0,$$
$$(\delta\varepsilon) \quad \text{III.} \qquad (2a_4 y + 4a_3 y^2) + (6a_2 y + 2a_3)x + 2a_1 x^2 = 0.$$

En éliminant x entre I et II, on a

$$\begin{vmatrix} y^2 & -1 \\ 2a_3 + 4a_1 y^2 + 6a_2 y & 2a_1 + 2a_0 y \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\zeta) \qquad 2a_0 y^3 + 6a_1 y^2 + 6a_2 y + 2a_3 = 0.$$

De même, en éliminant x entre I et III, on a

$$\begin{vmatrix} y^2 & -1 & 0 \\ 0 & y^2 & -1 \\ 2a_4 y + 4a_3 y^2 & 6a_2 y + 2a_3 & 2a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\eta) \qquad 2a_1 y^3 + 6a_2 y^2 + 6a_3 y + 2a_4 = 0.$$

Mais, en remplaçant mécaniquement dans les équations (ζ) et (η) la lettre y par le rapport $\frac{x}{y}$ et en multipliant ensuite par y^3 les équations (ζ) et (η) prennent exactement la forme des deux quotients différentiels de l'équation (B), pris par rapport à x et y. Et l'on voit que l'élimination de y entre (ζ) et (η) serait identique avec l'opération d'élimination qui conduit à la forme connue du *discriminant* de l'équation (A) :

$$\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

D'une manière semblable, *toute* question qui naît de la discussion de l'équation générale du quatrième degré peut être traitée sous forme purement géométrique.