H. Laurent

Sur la théorie de l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 116-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__116_1>

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

La méthode d'élimination que j'ai donnée dans ce Recueil se prête à un grand nombre d'applications et de transformations.

Considérons les deux équations algébriques

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0,$$

des degrés m et n respectivement ($m \geqq n$); pour éliminer x entre ces deux équations, on divise $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, ...,

$x^{n-1}\varphi(x)$ par $\psi(x)$ et l'on égale à zéro le déterminant des coefficients des restes de ces divisions.

Pour appliquer cette règle, cherchons les restes en question ; à cet effet, désignons-les par φ_0, φ_1, φ_2, ... ; nous aurons

$$x^i\varphi(x) = Q\psi(x) + \varphi_i(x),$$

Q désignant un polynôme entier. Soit a une racine de $\psi(x) = 0$, on aura

$$\varphi_i(a) = a^i\varphi(a);$$

$\varphi_i(x)$, étant connu pour plus de $n-1$ valeurs de x, sera fourni par la formule d'interpolation de Lagrange, et l'on aura

$$(2) \qquad \varphi_i(x) = \sum \frac{a^i\varphi(a)}{x-a} \cdot \frac{\psi(x)}{\psi'(a)}.$$

Divisons $\psi(x)$ par $x-a$; si l'on a

$$\psi(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

on aura

$$\frac{\psi(x)}{x-a} = A_0x^{n-1} + (A_0a + A_1)x^{n-2} + (A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{n-3} + \ldots,$$

et la formule (2) donnera

$$\varphi_i(x) = \sum \frac{a_i\varphi(a)}{\psi'(a)}[A_0x^{n-1} + (A_0a + A_1)x^{n-2} + \ldots],$$

en sorte que la résultante des équations (1) se mettra sous la forme suivante, en désignant par ϖ la quantité $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$,

$$\begin{vmatrix} A_0\Sigma\varpi & A_0\Sigma a\varpi + A_1\Sigma\varpi & A_0\Sigma a^2\varpi + A_1\Sigma a\varpi + A_2\Sigma\varpi & \ldots \\ A_0\Sigma a\varpi & A_0\Sigma a^2\varpi + A_1\Sigma a\varpi & A_0\Sigma a^3\varpi + A_1\Sigma a^2\varpi + A_2\Sigma a\varpi & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

En combinant convenablement les colonnes de ce déterminant, on finit par mettre la résultante sous la forme

$$\begin{vmatrix} A_0\Sigma\varpi & A_0\Sigma a\varpi & \dots \\ A_0\Sigma a\varpi & A_0\Sigma a^2\varpi & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \sum \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \sum a\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \dots & \sum a^{n-1}\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \\ \sum a\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \sum a^2\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \dots & \sum a^n\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \end{vmatrix} = 0.$$

Si, en particulier, on suppose $\varphi(x) = \psi'(x)$, on retrouve la formule connue qui exprime que $\psi(x) = 0$ a une racine multiple

$$\begin{vmatrix} \Sigma a^0 & \Sigma a^1 & \dots & \Sigma a^{n-1} \\ \Sigma a^1 & \Sigma a^2 & \dots & \Sigma a^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

La formule (3) montre que le premier membre de la résultante peut se mettre sous la forme d'un discriminant de polynôme homogène du second degré égalé à zéro.

Les éléments du déterminant (3) sont des fonctions symétriques que l'on sait calculer et que l'on obtient, comme on sait, à l'aide d'une seule division. Représentons, avec Cauchy, par le symbole

$$\mathcal{E}\,F(z)$$

le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $F(z)$ ordonné suivant les puissances entières croissantes de z, la formule (3) pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} \mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z^2\varphi(z)}{\psi(z)} & \dots \\ \mathcal{E}\frac{z\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z^2\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z^3\varphi(z)}{\psi(z)} & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

et même, si l'on veut,

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{L}\dfrac{z'\varphi(z')}{\psi(z')} & \mathcal{L}\dfrac{z''^2\varphi(z'')}{\psi(z'')} & \ldots \\ \mathcal{L}\dfrac{z\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{L}\dfrac{z'^2\varphi(z')}{\psi(z')} & \mathcal{L}\dfrac{z''^3\varphi(z'')}{\psi(z'')} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}\ldots\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\frac{\varphi(z')}{\psi(z')}\frac{\varphi(z'')}{\psi(z'')}\ldots\Delta = 0,$$

Δ désignant le déterminant $\Sigma \pm z^0 z' z''^2 \ldots$ qui est le produit des différences que l'on peut former avec les quantités z, z', z'', ..., d'où le théorème suivant :

Le premier membre de la résultante des équations (1) *est le coefficient de* $\frac{1}{z}\frac{1}{z'}\frac{1}{z'}\cdots$ *dans le développement du produit*

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\frac{\varphi(z')}{\psi(z')}\frac{\varphi(z'')}{\psi(z'')}\cdots\Delta.$$

Ce théorème permet de mettre le premier membre de la résultante sous la forme d'une intégrale multiple.

Nous n'insistons pas sur ce point qui n'est que curieux, mais nous ferons observer qu'il permet de faire intervenir dans les calculs la résultante de deux équations quelconques sans avoir besoin de la calculer effectivement, absolument comme la théorie des déterminants permet de faire intervenir, sans avoir besoin de la trouver, la résultante de plusieurs équations du premier degré.