NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FOURET

Sur les pôles principaux d'inversion de la cyclide de Dupin

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 113-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__113_0>

SUR LES POLES PRINCIPAUX D'INVERSION DE LA CYCLIDE DE DUPIN;

Par M. G. FOURET.

1. J'ai démontré, il y a quelques années [1], d'une manière fort simple, qu'il n'existe, à l'exception du cercle et de la sphère, aucune courbe plane se transformant en elle-même par inversion, à l'aide d'une infinité de pôles formant un lieu géométrique, aucune surface se reproduisant par inversion, au moyen d'une infinité de pôles coïncidant avec tous les points d'une surface. Je faisais remarquer, en terminant, qu'il existe des surfaces ayant pour pôles principaux d'inversion tous les points d'une ligne; et, après avoir cité, comme exemple, le *tore* qui a pour pôles principaux d'inversion tous les points de son axe, ce qui est exact et suffisait à justifier mon assertion, j'ajoutais, comme second exemple, la *cyclide de Dupin,* à laquelle une erreur de mémoire me faisait attribuer comme pôles principaux tous les points d'une circonférence.

Mon attention a été récemment appelée sur cette affirmation inexacte par un jeune géomètre distingué, M. Hadamard, qui, en reprenant l'étude de la question dont je m'étais occupé, est parvenu à démontrer que *le seul lieu géométrique de pôles principaux d'inversion que puisse admettre une surface est une droite ou un système de droites en nombre limité* [2].

---

(1) *Nouvelles Annales,* 3e série, t. II, p. 259.

(2) Le travail de M. Hadamard doit paraître prochainement dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (numéro de mai 1888).

2. Il est facile de voir que la cyclide de Dupin admet, comme pôles principaux d'inversion, tous les points d'un système de deux droites de directions rectangulaires. On le démontre, en s'appuyant sur la propriété dont jouit la cyclide d'être la transformée par inversion d'un tore, et même d'une infinité de tores, comme l'a montré autrefois M. Mannheim, dans une étude géométrique très intéressante [1].

Considérons à cet effet une cyclide, et l'un des tores dont elle est la transformée par inversion. Ce tore est l'enveloppe d'une série de sphères (S) ayant toutes leur centre sur l'axe de révolution O de cette surface. Dans la transformation, les sphères (S) se changent en sphères (S′), enveloppant la cyclide et coupant orthogonalement un même cercle O′, transformé de l'axe O du tore. Les sphères (S′) ont donc, comme axe radical commun, la perpendiculaire D au plan du cercle O′ menée par son centre. Un point quelconque de cette droite a, par suite, la même puissance par rapport à toutes les sphères (S′), et aussi par rapport aux cercles de contact de ces sphères avec la cyclide, dont les plans, on le voit immédiatement, passent tous par la droite D. Un point quelconque de cette droite est donc bien un pôle principal d'inversion de la cyclide.

Le tore peut encore être considéré comme l'enveloppe d'une série de sphères (Σ) ayant pour grands cercles ses cercles méridiens. Ces sphères, orthogonales à un même cercle Ω, situé dans le plan de l'équateur du tore, se changent, par inversion, en d'autres sphères (Σ′), qui enveloppent la cyclide et sont orthogonales à un même cercle Ω′, inverse de Ω. On conclut de là, comme tout à

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XIX.

l'heure, que l'axe Δ de ce cercle est un lieu de pôles principaux d'inversion pour la cyclide.

3. Il est clair d'ailleurs que la cyclide n'a pas de pôle principal d'inversion en dehors des droites D et Δ; car tout pôle principal de la cyclide doit provenir d'un des pôles ou plans principaux du tore, et ceux-ci, comme on vient de le voir, fournissent uniquement les pôles de la cyclide situés sur D et Δ.

Pour voir que les droites D et Δ sont rectangulaires, il suffit de remarquer : 1° que le plan équatorial commun des sphères (S'), c'est-à-dire le plan du cercle O', coïncide avec le plan méridien du tore qui passe par le pôle de transformation; 2° que le plan équatorial commun des sphères (Σ'), c'est-à-dire le plan du cercle Ω', est perpendiculaire à ce même plan méridien, de même que le plan du cercle inverse Ω. Par suite, les droites D et Δ, respectivement perpendiculaires à deux plans rectangulaires, ont elles-mêmes des directions rectangulaires. Ces droites jouissent, par rapport à la cyclide, de plusieurs autres propriétés intéressantes qui sont exposées dans la Note de M. Mannheim déjà citée.

4. On peut encore déduire d'un théorème dû à M. Mannheim [1] que *la cyclide de Dupin est la seule surface ayant pour pôles principaux d'inversion tous les points de deux droites.*

Ce théorème est le suivant :

Lorsqu'une surface a une infinité de pôles principaux en ligne droite, on peut la transformer d'une infinité de manières en surfaces de révolution; les pôles

[1] *Bulletin de la Société Philomathique*, p. 106, année 1860.

de transformation, satisfaisant à cette condition, sont sur une circonférence située dans le plan principal que possède nécessairement la surface.

Imaginons une surface ayant pour pôles principaux tous les points de deux droites D et Δ. D'après le théorème précédent, nous pouvons transformer cette surface en une surface de révolution, en prenant le pôle d'inversion sur une certaine circonférence dont le plan est perpendiculaire à D. Aux pôles principaux de la surface primitive situés sur Δ correspondent des pôles principaux de la nouvelle surface situés sur une droite Δ', qui, par raison de symétrie, coïncide nécessairement avec l'axe de révolution de cette surface. La méridienne de cette surface, possédant une infinité de pôles principaux d'inversion en ligne droite, ne peut se composer que de cercles. La surface résultant de la transformation est donc un tore, et l'on en conclut que la surface primitive est une cyclide de Dupin.