Nouvelles annales de mathématiques

Geminiano Pirondini

Sur les hélicoïdes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 87-101

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__87_1>

SUR LES HÉLICOÏDES;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

1. Considérons la surface engendrée par une droite L assujettie à un mouvement hélicoïdal autour d'une droite R; soient P le point de rencontre de L avec la perpendiculaire commune aux droites L, R, et h la plus courte distance de ces droites. L'hélice E décrite par le point P est la ligne de striction de la surface réglée engendrée; soient i l'inclinaison de L sur R et θ l'incli-

naison constante de l'hélice E sur les génératrices du cylindre C.

On passe d'une position de la droite mobile à la suivante par une rotation infinitésimale autour de R et une translation suivant la direction R; la rotation est mesurée par l'angle de contingence $\frac{d\sigma}{h}$ de la section droite du cylindre C, et la translation par $ds\cos\theta$, ds et $d\sigma$ étant les arcs élémentaires de l'hélice E et de la section droite de C.

Or

$$d\sigma = ds\sin\theta;$$

par conséquent, si nous désignons par p le paramètre du mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire le rapport de la vitesse de translation à la vitesse de rotation, nous aurons

$$p = \frac{ds\cos\theta}{\frac{d\sigma}{h}} = h\cot\theta.$$

Si l hélicoïde est développable, la droite mobile est à chaque instant tangente à l'hélice E : donc $\theta = i$ et $p = h\cot i$.

Si l'hélicoïde a pour génératrices rectilignes les binormales d'une ligne, l'hélice E est une trajectoire orthogonale des génératrices; donc

$$\theta + i = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad p = h\tang i.$$

On a donc le théorème :

Si h est la plus courte distance des deux droites L, R, *et i leur inclinaison, la droite* L, *dans un mouvement hélicoïdal dont le paramètre est p, autour de* R, *engendre un hélicoïde développable lorsque $p = h\cot i$,* *et un hélicoïde lieu des binormales d'une hélice circulaire, lorsque* $p = h \tang i$.

2. Soient $\xi = \rho \cos u$, $\eta = \rho \sin u$, ζ (ρ et ζ étant deux fonctions arbitraires de u) les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne à double courbure L, assujettie à un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des ζ; si p est le paramètre du mouvement, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'hélicoïde engendré sont données comme il suit :

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v = \rho \cos(u + v);$$
$$y = \xi \sin v + \eta \cos v = \rho \sin(u + v);$$
$$z = \zeta + pv.$$

Sur l'hélicoïde, $u = \text{const.}$ est l'équation des hélices circulaires et $v = \text{const.}$ est l'équation de la ligne génératrice dans ses différentes positions.

De ces égalités, en indiquant les dérivées par des accents, on tire

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2;$$
$$F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \rho^2 + p\zeta';$$
$$G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \rho^2 + p^2.$$

Si A, B, C sont les déterminants qui ont pour éléments de la deuxième et de la troisième ligne $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$; $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, et pour éléments de la première respectivement $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$; $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, nous avons

$$A = \zeta''\rho\rho' + \zeta'(\rho^2 - \rho\rho'') - p(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''),$$
$$B = \zeta'\rho^2 - p(\rho^2 + \rho'^2),$$
$$C = \rho^2(\zeta' - p).$$

L'équation différentielle des asymptotiques est

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}[\zeta''\rho\rho' + \zeta'(\rho^2 - \rho\rho'') - p(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')]\,du^2 \\ + 2[\zeta'\rho^2 - p(\rho^2 + \rho'^2)]\,du\,dv + \rho^2(\zeta' - p)\,dv^2 = 0.\end{aligned}$$

Si la génératrice L est dans toutes ses positions une asymptotique de l'hélicoïde, la dernière équation doit être vérifiée lorsque l'on y suppose $dv = 0$; on aura par conséquent

$$(1) \qquad \zeta''\rho\rho' + \zeta'(\rho^2 - \rho\rho'') - p(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') = 0,$$

d'où l'on déduit par intégration

$$\zeta = a + \int \left(b + p \int \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho\rho'} e^{\int \frac{\rho - \rho''}{\rho} du} du \right) e^{-\int \frac{\rho - \rho''}{\rho'} du} du.$$

On a ainsi ce théorème :

Les lignes L *qui, dans un mouvement hélicoïdal autour de l'axe* Oz, *restent toujours asymptotiques sur la surface engendrée, sont représentées par les équations*

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos u, \\ \eta &= \rho \sin u, \\ \zeta &= a + \int \left(b + p \int \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho\rho'} e^{\int \frac{\rho - \rho''}{\rho'} du} du \right) e^{-\int \frac{\rho - \rho''}{\rho} du} du,\end{aligned}$$

a et b étant deux constantes arbitraires et p le paramètre du mouvement hélicoïdal.

3. Cherchons si une hélice peut vérifier la condition précédente, lorsque le mouvement hélicoïdal a lieu autour d'une droite parallèle aux génératrices du cylindre.

Si i est l'inclinaison constante de l'hélice sur les génératrices du cylindre, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont

$$(2)\quad \xi = \rho\cos u,\qquad \eta = \rho\sin u,\qquad \zeta = \cot i\int\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,du,$$

et la condition (1) devient

$$(2\rho' - \rho\rho'' + \rho^2)\left(\frac{\rho^2\cot i}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} - p\right) = 0.$$

Nous avons ici deux cas à considérer, selon que soit vérifiée l'équation

$$2\rho' - \rho\rho'' + \rho^2 = 0$$

ou bien

$$\frac{\rho^2\cot i}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} - p = 0.$$

Dans le premier cas, si l'on pose $\rho = e^{\varphi}$, on obtient l'équation

$$\varphi'' = 1 + \varphi'^2,$$

qui donne par intégration

$$\varphi = \log\frac{a}{\cos u}\qquad (a = \text{const.}).$$

Par conséquent

$$(3)\qquad \rho = \frac{a}{\cos u};$$

c'est l'équation polaire d'une droite.

Dans l'autre cas, on a

$$p\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2\cot^2 i - p^2}} = u + a,$$

en faisant $a = -\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\arcsin\left(\frac{p}{\rho\cot i}\right) = \frac{\pi}{2} - u,$$

d'où l'on déduit

$$(4)\qquad \rho\cos u = p\tang i.$$

Le cylindre qui contient l'hélice se réduit donc à un plan et l'hélice à une droite.

Donc :

Si une hélice est assujettie à un mouvement hélicoïdal autour d'une droite parallèle aux génératrices du cylindre, la condition que la ligne reste toujours asymptotique sur la surface engendrée est vérifiée seulement lorsque l'hélice se réduit à une droite.

On peut observer que, dans le premier cas (3), le paramètre du mouvement est arbitraire; dans le second cas (4), le paramètre est donné par l'égalité $p = h \cot i$, h étant la plus courte distance entre la droite mobile et l'axe des z; l'hélicoïde engendré est donc, en vertu du théorème du n° 1, une surface développable.

4. Nous allons voir si, dans un hélicoïde, les hélices circulaires peuvent être asymptotiques; une telle condition est remplie lorsque l'équation (1) est vérifiée en y supposant $du = 0$. Par conséquent on doit avoir, pour la ligne génératrice L,

$$\zeta = pu. \tag{5}$$

Par chaque point de la ligne L, conduisons la droite perpendiculaire à l'axe Oz; on obtient ainsi une surface réglée à plan directeur dans laquelle l'axe Oz est la ligne de striction; le paramètre de distribution des plans tangents de cette surface réglée est $\frac{d\zeta}{du}$ qui est, à cause de (5), constant. La surface réglée est donc l'hélicoïde gauche, lieu des normales principales d'une hélice régulière; par conséquent, la ligne L, dans le mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de Oz, glisse sur cet hélicoïde gauche.

On a donc ce théorème :

Si les hélices circulaires d'un hélicoïde sont asymptotiques, la surface est l'hélicoïde gauche engendré par les normales principales d'une hélice circulaire.

La relation (5) caractérise les lignes placées sur l'hélicoïde gauche à plan directeur et on peut l'appliquer avec profit.

Exemples. — Une ligne sphérique peut être représentée par les équations

$$\xi = \rho \cos u, \qquad \eta = \rho \sin u, \qquad \zeta = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2},$$

R étant le rayon de la sphère ; l'égalité (5) devient

$$pu = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2},$$

d'où l'on tire

$$\rho = \sqrt{\mathrm{R}^2 - p^2 u^2}.$$

Donc :

La ligne sphérique

$$\xi = \sqrt{\mathrm{R}^2 - p^2 u^2} \cos u, \qquad \eta = \sqrt{\mathrm{R}^2 - p^2 u^2} \sin u, \qquad \zeta = pu,$$

dans le mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe $\mathrm{O}z$, engendre une portion d'un hélicoïde gauche à plan directeur.

Cherchons si, dans l'hélicoïde gauche à plan directeur, il y a des hélices, non trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, placées sur des cylindres ayant les génératrices parallèles à l'axe de l'hélicoïde.

On a, à présent, pour la coordonnée ζ,

$$\zeta = \cot i \int \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, du,$$

et, pour que la condition (5) soit vérifiée, il doit être

$$p \tang i = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

d'où l'on déduit

$$du = \frac{d\rho}{\sqrt{p^2 \tan^2 i - \rho^2}}.$$

On obtient par intégration

$$u = \arcsin\left(\frac{\rho}{p \tan i}\right),$$

d'où

$$\rho = p \tan i \sin u ;$$

c'est l'équation polaire d'une circonférence de rayon $\frac{p \tan i}{2}$ qui passe par le pôle.

Pour chaque valeur de i, on obtient une hélice circulaire placée sur la surface.

Donc :

Sur l'hélicoïde gauche, lieu des normales principales d'une hélice circulaire, il y a un nombre infini d'hélices, non trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, qui sont placées sur des cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe de l'hélicoïde. Ces hélices sont circulaires et les cylindres passent par l'axe de l'hélicoïde.

Puisque l'on a

$$p = 2r \cot i,$$

r étant le rayon du cercle qui passe par le pôle, il subsiste ce théorème :

Si une hélice circulaire, placée sur un cylindre dont la section droite a un rayon r et inclinée de l'angle i sur les génératrices, est assujettie à un mouvement hélicoïdal de paramètre $p = 2r \cot i$ autour d'une génératrice quelconque du cylindre, la surface engendrée est une portion d'un hélicoïde gauche à plan directeur.

3. Si θ est l'angle des lignes coordonnées $u=$ const., $v=$ const. sur un hélicoïde, nous avons

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

d'où il résulte

$$F^2 = EG\cos^2\theta.$$

Si l'on substitue dans cette égalité les valeurs de E, F, G du n° 2, on a

$$(\rho^2 + p\zeta')^2 = (\rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2)(\rho^2 + p^2)\cos^2\theta,$$

c'est-à-dire

$$[p^2 - (p^2 + \rho^2)\cos^2\theta]\zeta'^2 + 2p\rho^2\zeta' + \rho^4 - (\rho^2 + \rho'^2)(p^2 + \rho^2)\cos^2\theta = 0;$$

d'où

$$\zeta' = \frac{-p\rho^2 \pm \cos\theta\sqrt{p^2+\rho^2}\sqrt{\rho^4 + (\rho^2+\rho'^2)(p^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta)}}{p^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta}.$$

Donc :

Les lignes qui, dans un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe Oz, restent toujours trajectoires sous l'angle constant θ des hélices de l'hélicoïde engendré, sont représentées par les équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \rho\cos u, \\ \eta &= \rho\sin u, \\ \zeta &= \int \frac{-p\rho^2 \pm \cos\theta\sqrt{p^2+\rho^2}\sqrt{\rho^4 + (\rho^2+\rho'^2)(p^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta)}}{p^2\sin\theta - \rho^2\cos^2\theta}\,du. \end{aligned} \right.$$

Si, dans les équations (6), on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a un résultat très remarquable; dans ce cas, la ligne génératrice de l'hélicoïde est dans toutes ses positions une géodésique de la surface. On a ainsi ce théorème :

Les lignes qui, dans un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe Oz restent toujours géo-

désiques et trajectoires orthogonales des hélices circulaires de l'hélicoïde engendré, sont représentées par les équations

$$(7)\qquad \xi = \rho\cos u,\qquad \eta = \rho\sin u,\qquad \zeta = -\frac{1}{p}\int \rho^2\,du.$$

Si, dans les équations (6), on suppose $p = 0$, on obtient les lignes qui, dans la rotation autour de l'axe Oz, engendrent une surface de révolution, dont elles sont des loxodromies; cette hypothèse réduit les équations (6) comme il suit :

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi = \rho\cos u,\\ \eta = \rho\sin u,\\ \zeta = \dfrac{1}{\cos\theta}\displaystyle\int\sqrt{\rho^2\sin^2\theta - \rho'^2\cos^2\theta}\,du. \end{cases}$$

Si la ligne L est une hélice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz, on a

$$\zeta = \cot i\int\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,du;$$

en comparant cette égalité avec la dernière des équations (8), on obtient

$$\rho\sqrt{\operatorname{tang}^2\theta - \cot^2 i} = \frac{1}{\sin i}\rho';$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} = \sin i\sqrt{\operatorname{tang}^2\theta - \cot^2 i}\,du,$$

et, par intégration,

$$\log\rho = \log a + \left(\sin i\sqrt{\operatorname{tang}^2\theta - \cot^2 i}\right)u,$$

a étant une constante arbitraire.

Cette égalité peut s'écrire

$$\rho = ae^{\left(\sin i\sqrt{\operatorname{tang}^2\theta - \cot^2 i}\right)u}\ ;$$

c'est l'équation d'une spirale logarithmique; une telle courbe se réduit à un cercle de rayon a lorsque $\tang\theta = \cot i$.

L'hélice demandée est, par conséquent, une hélice cylindro-conique ou bien une hélice circulaire.

Donc :

Les seules surfaces de révolution dans lesquelles une loxodromie est une hélice placée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe de la surface sont le cône et le cylindre de révolution.

Si la ligne représentée par les équations (7) est une hélice, il doit être

$$-\frac{1}{p}\rho^2 = \cot i\sqrt{\rho^2+\rho'^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{p\cot i\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-p^2\cot^2 i}} = du.$$

En intégrant,

$$-\arcsin\left(\frac{p\cot i}{\rho}\right) = u+a,$$

et, si l'on pose la constante arbitraire $a = -\frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho\cos u = p\cot i;$$

c'est l'équation polaire d'une droite dont la distance h au pôle est donnée par l'égalité

$$h = p\cot i.$$

Le cylindre est donc réduit à un plan et l'hélice à une droite; la plus courte distance entre cette droite et l'axe Oz est $p\cot i$.

En ayant égard au théorème du n° 1, on peut donc énoncer ce théorème :

Si une trajectoire orthogonale des hélices circulaires *d'un hélicoïde a ses tangentes inclinées d'un angle constant sur l'axe de l'hélicoïde, cette trajectoire est une droite, et l'hélicoïde est engendré par les binormales d'une hélice circulaire.*

Si la projection de la ligne mobile L sur le plan $\zeta = 0$ est une spirale logarithmique, on a

$$\rho = ae^{\cot i u},$$

i étant l'inclinaison constante de la ligne sur les rayons vecteurs. Alors

$$\zeta = -\frac{a^2}{p}\int e^{2\cot i u}\,du = -\frac{a^2}{2p}\tang i\, e^{2\cot i u} = -\frac{\tang i}{2p}\rho^2;$$

mais, si s est l'arc de la spirale, compté du point $u = 0$, on a

$$\rho = s\cos i + a,$$

par conséquent

$$\zeta = -\frac{\tang i}{2p}(s\cos i + a)^2,$$

ou bien

$$\left(s + \frac{a}{\cos i}\right)^2 = -\frac{2p}{\sin i \cos i}\zeta.$$

Cette équation démontre que, lorsque le cylindre projetant L sur le plan $\zeta = 0$ est développé sur un plan, la ligne L devient une parabole dont le paramètre est $\frac{2p}{\sin i \cos i}$.

Donc :

Parmi les lignes placées sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique, celles qui, dans un mouvement hélicoïdal autour de la génératrice qui passe par le pôle de la spirale, restent toujours géodésiques et trajectoires orthogonales des hélices de l'hélicoïde engendré, sont des paraboles dont le plan est enveloppé sur le cylindre de manière que *l'axe de la parabole coïncide avec une génératrice du cylindre.*

6. Sur l'hélicoïde engendré par une ligne L désignons par ρ_t le rayon de courbure géodésique des trajectoires orthogonales L_t des lignes L; il résulte

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\right). \tag{9}$$

La ligne L sera donc une trajectoire orthogonale d'un système de géodésiques lorsque

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} = a,$$

a étant une constante.

Cette égalité, en ayant égard aux valeurs de E, F, G du n° 2, devient

$$(\rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2)(p^2 + \rho^2) - (\rho^2 + p\zeta')^2 = a^2(\rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2),$$

d'où l'on tire

$$\zeta' = \frac{p\rho^2 \pm \sqrt{p^2\rho^4 + (\rho^2 - a^2)[(a^2 - p^2)(\rho^2 + \rho'^2) - \rho^2\rho'^2]}}{\rho^2 - a^2}$$

Donc :

Les lignes qui, dans un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe Oz, restent sur l'hélicoïde engendré trajectoires orthogonales d'un système de géodésiques, sont représentées par les équations

$$\xi = \rho \cos u,$$
$$\eta = \rho \sin u.$$
$$\zeta = \int \frac{p\rho^2 \pm \sqrt{p^2\rho^4 + (\rho^2 - a^2)[(a^2 - p^2)(\rho^2 + \rho'^2) - \rho^2\rho'^2]}}{\rho^2 - a^2} du.$$

On a un résultat très remarquable, lorsque l'on suppose constante la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_v}$ de la ligne mobile L et en outre $p = 0$; ici il doit être

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{d\sqrt{E}}{dv} - \frac{d}{du}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)\right] = \text{const.} = -\frac{1}{k}.$$

Mais, à cause des valeurs de E, F, G, nous avons

$$\frac{1}{\rho_v} = -\frac{\rho'}{a\rho};$$

il vient donc

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a}{k};$$

d'où

$$\rho = be^{\frac{a}{k}u},$$

b étant une constante. La projection équatoriale de la ligne mobile L est donc une spirale logarithmique.

Si l'on désigne par K la courbure totale de la surface, on a (puisque E, F, G sont indépendantes de v)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{dG}{du}\right),$$

c'est-à-dire

$$K = -\frac{1}{a^2}\frac{\rho^3\rho'' + a^2(\rho'^2 - \rho\rho'')}{\rho^4}.$$

Cette égalité, à cause de $\rho = be^{\frac{a}{k}u}$, devient

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

On a donc ce théorème :

Si sur une surface de révolution une trajectoire orthogonale L *d'un système de géodésiques a la courbure géodésique constante, la projection équatoriale de la ligne* L *est une spirale logarithmique et la surface est à courbure constante négative.*

7. Considérons l'hélicoïde engendré par un cercle de rayon R dont le centre glisse sur l'axe de la surface, tandis que le plan du cercle passe toujours par cet axe.

Puisque les coordonnées d'un point quelconque du cercle sont

$$\xi = \mathrm{R}\cos u, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \mathrm{R}\sin u,$$

les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface sont données par les égalités

$$x = \mathrm{R}\cos u \cos v, \qquad y = \mathrm{R}\cos u \sin v, \qquad z = pv + \mathrm{R}\sin u,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}^2, \qquad \mathrm{F} = 2p\mathrm{R}\cos u, \qquad \mathrm{G} = p^2 + \mathrm{R}^2\cos^2 u.$$

La formule (9) donne pour la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_t}$ des trajectoires orthogonales L_t des cercles ($v =$ const.)

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{p^2 + (\mathrm{R}^2 - p^2)\cos^2 u}} \frac{d}{du}\left[\sqrt{p^2 + (\mathrm{R}^2 - p^2)\cos^2 u}\right].$$

Les lignes L_t sont des géodésiques sur l'hélicoïde lorsque $\frac{1}{\rho_t} = 0$, condition qui n'est autrement remplie que par $\mathrm{R} = p$.

On a donc la propriété suivante :

Lorsque le paramètre du mouvement hélicoïdal est égal au rayon du cercle mobile, les trajectoires orthogonales des cercles sont des lignes géodésiques.