WEILL

Sur la division des polynômes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 83-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__83_1>

SUR LA DIVISION DES POLYNOMES;

PAR M. WEILL.

Soit à diviser 1 par le polynôme

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots + \lambda x^n,$$

dans lequel les coefficients α, β, ..., λ sont des entiers. Les coefficients du quotient seront tous des nombres entiers. Or, si l'on désigne par $f(x)$ le polynôme, et par $a, b, c, \ldots, l$ ses racines, on a l'identité

$$\frac{1}{f(x)} = \sum \frac{\frac{1}{f'(a)}}{x-a} = \sum \frac{-1}{f'(a)}\left(\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots\right).$$

Par suite, le coefficient de x^n dans le quotient considéré est

$$-\frac{1}{a^{n+1}f'(a)} - \frac{1}{b^{n+1}f'(b)} - \ldots,$$

et c'est un nombre entier. Cette remarque, extrêmement simple, donne des théorèmes d'Arithmétique assez curieux. Pour les énoncer, nous nous bornerons à considérer comme diviseur un trinôme du second degré; il est facile d'étendre les résultats à des cas plus complexes. Considérons d'abord le quotient

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \ldots.$$

Soit λ l'exposant de x dans un terme; on voit que, si $\lambda = 3m+2$, le coefficient est zéro; il est 1 et (-1) quand λ est de la forme $3m$ et $3m+1$.

Or le coefficient de x^λ est

$$(-1)^{\lambda+2}\frac{(1+i\sqrt{3})^{\lambda+1} - (1-i\sqrt{3})^{\lambda+1}}{2^{\lambda+1}i\sqrt{3}}.$$

On en conclut, en représentant par C_m^p le nombre des combinaisons de m objets p à p,

$$C_{\lambda+1}^1 - 3C_{\lambda+1}^3 + 3^2C_{\lambda+1}^5 - \ldots = \pm 2^\lambda.$$

Il serait intéressant d'établir cette formule par des considérations directes.

Considérons encore le quotient

$$\frac{1}{1-x-x^2};$$

les coefficients des termes de ce quotient forment la suite bien connue 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... L'expression du coefficient de x^{n-1}, c'est-à-dire du $n^{\text{ième}}$ nombre de la série de Lamé, est

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}},$$

et, par suite, le nombre entier

$$C_n^1+5C_n^3+5^2C_n^5+\ldots$$

est un multiple de 2^{n-1}.

D'une manière générale, a et b étant deux entiers quelconques (b ne pouvant être nul), le nombre

$$C_n^1+(a^2-4b)C_n^3+(a^2-4b)^2C_n^5+\ldots$$

est multiple de 2^{n-1}.