

WEILL

Sur la division des polynômes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 6
(1887), p. 83-85

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__83_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DIVISION DES POLYNOMES;

PAR M. WEILL.

Soit à diviser 1 par le polynôme

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \dots + \lambda x^n,$$

dans lequel les coefficients $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des entiers.
Les coefficients du quotient seront tous des nombres

entiers. Or, si l'on désigne par $f(x)$ le polynôme, et par a, b, c, \dots, l ses racines, on a l'identité

$$\frac{1}{f(x)} = \sum \frac{1}{x-a} = \sum \frac{-1}{f'(a)} \left(\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots \right).$$

Par suite, le coefficient de x^n dans le quotient considéré est

$$-\frac{1}{a^{n+1}f'(a)} - \frac{1}{b^{n+1}f'(b)} - \dots,$$

et c'est un nombre entier. Cette remarque, extrêmement simple, donne des théorèmes d'Arithmétique assez curieux. Pour les énoncer, nous nous bornerons à considérer comme diviseur un trinôme du second degré; il est facile d'étendre les résultats à des cas plus complexes. Considérons d'abord le quotient

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \dots$$

Soit λ l'exposant de x dans un terme; on voit que, si $\lambda = 3m + 2$, le coefficient est zéro; il est 1 et (-1) quand λ est de la forme $3m$ et $3m + 1$.

Or le coefficient de x^λ est

$$(-1)^{\lambda+2} \frac{(1+i\sqrt{3})^{\lambda+1} - (1-i\sqrt{3})^{\lambda+1}}{2^{\lambda+1}i\sqrt{3}}.$$

On en conclut, en représentant par C_m^p le nombre des combinaisons de m objets p à p ,

$$C_{\lambda+1}^1 - 3C_{\lambda+1}^3 + 3^2C_{\lambda+1}^5 - \dots = \pm 2^\lambda.$$

Il serait intéressant d'établir cette formule par des considérations directes.

Considérons encore le quotient

$$\frac{1}{1-x-x^2};$$

les coefficients des termes de ce quotient forment la suite bien connue 1, 1, 2, 3, 5, 8, L'expression du coefficient de x^{n-1} , c'est-à-dire du $n^{\text{ième}}$ nombre de la série de Lamé, est

$$\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}},$$

et, par suite, le nombre entier

$$C_n^1 + 5C_n^3 + 5^2 C_n^5 + \dots$$

est un multiple de 2^{n-1} .

D'une manière générale, a et b étant deux entiers quelconques (b ne pouvant être nul), le nombre

$$C_n^1 + (a^2 - 4b) C_n^3 + (a^2 - 4b)^2 C_n^5 + \dots$$

est multiple de 2^{n-1} .