Ch. Biehler

Sur la forme adjointe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 79-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__79_1>

SUR LA FORME ADJOINTE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration simple de quelques propriétés de la fonction adjointe d'une forme quadratique donnée; pour plus de simplicité, nous considérerons le cas d'une forme du second degré à trois variables.

Soit

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Si l'on pose

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Ax + B''y + B'z &= u,\\ B''x + A'y + Bz &= v,\\ B'x + By + A''z &= w,\end{aligned}\right.$$

on aura, en vertu du théorème d'Euler,

$$ux + vy + wz = f(x, y, z).$$

Ces quatre équations nous donnent immédiatement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u\\ B'' & A' & B & v\\ B' & B & A'' & w\\ u & v & w & f\end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\Delta f = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u\\ B'' & A' & B & v\\ B' & B & A'' & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe le second membre de l'égalité précédente, il viendra une expression de la forme

$$\begin{aligned} &\Delta f(x, y, z) \\ &\quad = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'uw + 2b''uv. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $F(u, v, w)$ ce polynôme du second degré; c'est la forme adjointe de $f(x, y, z)$. Ses coefficients sont les dérivées et demi-dérivées de Δ prises par rapport à A, A', A'', B, B', B''.

Si l'on résout les équations (1) par rapport à x, y, z, on obtient le système

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= au + b''v + b'w, \\ \Delta y &= b''u + a'v + bw, \\ \Delta z &= b'u + bv + a''w. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients a, a', a'', b, b', b'' sont précisément ceux de la fonction adjointe, comme on le vérifie encore en multipliant ces équations par u, v, w et en ajoutant membre à membre.

2. Si l'on opère maintenant sur $F(u, v, w)$, comme nous l'avons fait sur $f(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on forme la fonction adjointe de $F(u, v, w)$, on posera d'abord

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} au + b''v + b'w &= \xi, \\ b''u + a'v + bw &= \eta, \\ b'u + bv + a''w &= \zeta; \end{aligned}\right.$$

on a aussi

$$\xi u + \eta v + \zeta w = F;$$

il en résulte

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & F \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on désigne par δ le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

on aura

$$\delta F = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ la fonction du second membre; nous aurons

$$\delta\, F(u, v, w) = \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

Mais les équations (3), comparées aux équations (2), nous montrent que

$$\xi = \Delta x,$$
$$\eta = \Delta y,$$
$$\zeta = \Delta z;$$

on aura donc

$$\Delta f(x, y, z) = F(u, v, w),$$
$$\delta\, F(u, v, w) = \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z).$$

Si l'on élimine $F(u, v, w)$, il viendra

$$\Delta \delta f(x, y, z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z)$$

et, comme δ est le déterminant adjoint de Δ, on aura

$$\delta = \Delta^2,$$

par suite

$$\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

La forme adjointe de $F(u, v, w)$ est donc la forme primitive $f(x, y, z)$ dont tous les coefficients ont été multipliés par Δ.

Les coefficients de la fonction Φ sont formés avec les quantités a, a', a'', b, b', b'', comme ceux de F sont formés avec A, A′, A″, B, B′, B″; par suite, on aura, en vertu de la relation $\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} a'a'' - b^2 &= A\Delta, \\ a''a - b'^2 &= A'\Delta, \\ aa' - b''^2 &= A''\Delta, \\ ab - b'b'' &= B\Delta, \\ a'b' - b''b &= B'\Delta, \\ a''b'' - bb' &= B''\Delta. \end{aligned}$$

Ce sont les relations de Gauss; elles nous montrent que, si l'invariant de la fonction $f(x, y, z)$ est nul, la forme adjointe $F(u, v, w)$ est un carré parfait.