NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 60-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__60_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA LIMITE DE $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ QUAND m AUGMENTE INDÉFINIMENT;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Nous supposerons dans ce qui suit que m est entier et positif et nous considérerons d'abord le cas où x est

réel et positif. Tant que m est fini, on peut écrire

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x}{1.2}$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}.$$

On sait que, si $a, b, c, \ldots, l$ sont des nombres positifs moindres que l'unité, on a les inégalités

$$1>(1-a)(1-b)\ldots(1-l)>1-(a+b+\ldots+l),$$

et, en appliquant ce théorème aux quantités $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots,$ on aura, pour toute valeur de p inférieure à m,

$$1>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)>1-\frac{p(p-1)}{2m}$$

et, par suite,

$$\frac{x^p}{p!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{p!}$$
$$>\frac{x^p}{p!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x^{p-2}}{(p-2)!}.$$

On peut donc former le tableau suivant :

$$\frac{x^2}{2!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!}=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{2m},$$
$$\frac{x^3}{3!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!}>\frac{x^3}{3!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x}{1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{x^m}{m!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}>\frac{x^m}{m!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}.$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, après avoir ajouté à tous les membres la quantité $1+\frac{x}{1}$, et en posant, pour abréger,

$$e_m(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^m}{m!},$$

il viendra

$$e_m(x) > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > e_m(x) - \frac{x^2}{2m} e_{m-2}(x);$$

la fonction $e_m(x)$ a pour limite, quand m croît indéfiniment, la série convergente

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots,$$

que nous désignerons par $e(x)$.

Les inégalités précédentes nous montrent que

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

est compris entre deux quantités

$$e_m(x) \quad \text{et} \quad e_m(x) - \frac{x^2}{2m} e_{m-2}(x),$$

qui ont toutes deux pour limite $e(x)$ quand m augmente indéfiniment; par suite,

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

a aussi pour limite $e(x)$.

2. Supposons maintenant que x soit une quantité quelconque négative ou imaginaire; nous allons démontrer que $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ a encore pour limite $e(x)$.

A cet effet, formons la différence

$$e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

Nous allons montrer que le module de cette différence peut devenir plus petit que toute quantité donnée quand m

croît indéfiniment. On a évidemment

$$
\begin{aligned}
e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m
&= \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]\frac{x^2}{1.2} + \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\right]\frac{x^3}{3!} + \ldots \\
&+ \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\right]\frac{x^m}{m!};
\end{aligned}
$$

si l'on désigne par r le module de x, le module du second membre étant inférieur à la somme des modules de ses termes, on a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{mod}\left[e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right] &< \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right]\frac{r^2}{1.2} \\
&+ \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\right]\frac{r^3}{1.2.3} + \ldots \\
&+ \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\right]\frac{r^m}{m!}
\end{aligned}
$$

ou bien

$$\operatorname{mod}\left[e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right] < e_m(r) - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m.$$

Or nous avons démontré que, pour toute valeur de r positive,

$$e_m(r) > \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m > e_m(r) - \frac{r^2}{2m}\, e_{m-2}(r);$$

si l'on retranche les trois membres de cette double inégalité de la même quantité $e_m(r)$, il viendra

$$0 < e_m(r) - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m < \frac{r^2}{2m}\, e_{m-2}(r).$$

La différence $e_m(r) - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$ est donc comprise entre zéro et une quantité qui a pour limite zéro; par suite, le module de $e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ peut devenir plus petit que toute quantité donnée quand m augmente indéfiniment. On en conclut que

$$\lim\left[e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right]=0,$$

par suite

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=e(x);$$

la proposition est donc démontrée pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable x.

3. Nous allons établir maintenant que, si α et α' sont des quantités réelles ou imaginaires, on a

$$\lim\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m=\lim\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m \qquad \text{pour } m=\infty,$$

pourvu que le rapport $\frac{m}{m'}$ ait pour limite zéro, quand m augmente indéfiniment.

En effet, on a identiquement

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m&-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\\ =\frac{\alpha'}{m'}\Bigg[&\left(1-\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-1}\\ &+\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-2}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)+\ldots+\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}\Bigg],\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}&\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]\\ &<\operatorname{mod}\frac{\alpha'}{m'}\Bigg[\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-1}\\ &\qquad+\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-2}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)+\ldots\\ &\qquad+\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}\Bigg].\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que le module de la différence

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m$$

tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Soient r le module de α ; r' celui de α', on aura

$$\mathrm{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)<1+\frac{r}{m},$$

$$\mathrm{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)<1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'};$$

par suite,

$$\mathrm{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\frac{r'}{m'}\left[\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}+\ldots+\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m-1}\right]$$

et, *a fortiori*,

$$\mathrm{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\frac{r'}{m'}\times m\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}.$$

Mais, par hypothèse, $\frac{m}{m'}$ a pour limite zéro ; on a donc

$$1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}<1+\frac{r+r'}{m},$$

d'où

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<\left(1+\frac{r+r'}{m}\right)^{m-1}$$

et, par suite aussi,

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<\left(1+\frac{r+r'}{m}\right)^{m}$$

et

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<e(r+r').$$

On a donc

$$\mathrm{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]<\frac{m}{m'}r'\times e(r+r');$$

or $\frac{m}{m'}$, par hypothèse, a pour limite zéro ; $e(r+r')$ est une quantité finie : par suite, le module de la différence

$$\left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha'}{m'}\right)^m - \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m$$

peut devenir plus petit que toute quantité donnée; il s'ensuit que $\left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha'}{m'}\right)^m$ et $\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m$ ont même limite.

Il en serait de même si α' était une fonction de m dont le module tendît vers une limite finie quand m croît indéfiniment.

4. Le théorème précédent nous permet de démontrer une propriété importante de la fonction $e(x)$ pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable.

On a, quels que soient x et y,

$$e(x) \times e(y) = e(x + y).$$

En effet, $e(x)$ pour toute valeur réelle ou imaginaire de x est la limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment :

$$e(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m,$$

$$e(y) = \lim \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m;$$

par suite

$$e(x) \times e(y) = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m$$

ou

$$e(x) \times e(y) = \lim \left(1 + \frac{x + y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m;$$

mais, d'après ce que l'on a démontré, on a

$$\lim \left(1 + \frac{x + y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m = \lim \left(1 + \frac{x + y}{m}\right)^m$$

ou

$$\lim \left(1 + \frac{x + y}{m} + \frac{xy}{m^2}\right)^m = e(x + y),$$

par suite

$$e(x) \times e(y) = e(x+y),$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction $e(x)$ étendue à des valeurs quelconques de la variable.