CH. BIEHLER

Sur l’équation de degré m qui donne $\tan g\frac{a}{m}$ lorsqu’on connaît $\tan g a$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 5-9

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__5_0>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉQUATION DE DEGRÉ m QUI DONNE $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ LORSQU'ON CONNAIT $\operatorname{tang} a$;

PAR M. CH. BIEHLER.

L'équation de degré m, qui donne $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ lorsqu'on connaît $\operatorname{tang} a$, est, comme on sait,

$$i\alpha = \frac{(1+ix)^m - (1-ix)^m}{(1+ix)^m + (1-ix)^m},$$

en posant $\operatorname{tang}\frac{a}{m} = x$ et $\operatorname{tang} a = \alpha$.

Cette équation, mise sous forme entière, devient

$$(1+ix)^m(1-i\alpha) - (1-ix)^m(1+i\alpha) = 0.$$

Les deux expressions

$$(1+ix)^m(1-i\alpha) \quad \text{et} \quad (1-ix)^m(1+i\alpha)$$

étant imaginaires conjuguées, leur différence renferme i en facteur, et, par suite, en posant

$$(1) \qquad iV_m = (1+ix)^m(1-i\alpha) - (1-ix)^m(1+i\alpha),$$

le polynôme V_m sera à coefficients réels et de degré m.

Cela posé, nous allons former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme V_m, et nous allons appliquer les théorèmes de Sturm et de Rolle aux polynômes qui figurent dans cette équation, en vue de démontrer que $V_m = 0$ a toutes ses racines réelles.

1. A cet effet, prenons les dérivées des deux membres de l'égalité (1), il viendra

$$iV'_m = mi[(1+ix)^{m-1}(1-ix) + (1-ix)^{m-1}(1+ix)]$$

ou

$$(2)\qquad V'_m = m[(1+ix)^{m-1}(1-ix) + (1-ix)^{m-1}(1+ix)];$$

en dérivant une seconde fois,

$$(3)\qquad \begin{cases} V''_m = m(m-1)i[(1+ix)^{m-2}(1-ix) \\ \qquad\qquad - (1-ix)^{m-2}(1+ix)]. \end{cases}$$

D'autre part, en multipliant les deux membres de l'égalité (2), le premier par $2ix$, le second par

$$(1+ix) + (1-ix),$$

qui lui est égal, il viendra

$$\begin{aligned} 2ixV'_m = {} & m[(1+ix)^m(1-ix) - (1-ix)^m(1+ix)] \\ & + m[-(1+ix)^{m-1}(1-ix)(1-ix) \\ & \qquad + (1-ix)^{m-1}(1+ix)(1+ix)], \end{aligned}$$

et, en remplaçant le produit $(1+ix)(1-ix)$ par $i + x^2$, on aura

$$\begin{aligned} 2ixV'_m = {} & miV_m - m(1+x^2) \\ & \times [(1+ix)^{m-2}(1-ix) - (1-ix)^{m-2}(1+ix)] \end{aligned}$$

ou

$$2ixV'_m = miV_m - (1+x^2)\frac{V''}{(m-1)i},$$

ou enfin

$$2xV'_m(m-1) = m(m-1)V_m + (1+x^2)V''_m,$$

que l'on peut écrire

$$(4)\qquad m(m-1)V_m - 2(m-1)xV'_m + (1+x^2)V''_m = 0.$$

Cette équation va nous permettre de démontrer la réalité de toutes les racines de $V_m = 0$.

2. A cet effet, prenons les dérivées d'ordre μ des deux membres de l'équation (4), il viendra

$$\begin{aligned} m(m-1)V_m^{(\mu)} - 2(m-1)xV_m^{(\mu+1)} - 2\mu(m-1)V_m^{(\mu)} \\ + (1+x^2)V_m^{(\mu+2)} + 2\mu x V_m^{(\mu+1)} + \mu(\mu-1)V^{(\mu)} = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &(m-\mu)(m-\mu-1)V_m^{(\mu)} \\ &\quad - 2(m-\mu-1)xV_m^{(\mu+1)} + (1+x^2)V_m^{(\mu+2)} = 0. \end{aligned}$$

En donnant à μ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-2$, il viendra

$$m(m-1)V_m - 2(m-1)x V'_m + (1+x^2)V''_m = 0,$$
$$(m-1)(m-2)V'_m - 2(m-2)xV''_m + (1+x^2)V'''_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$2V_m^{(m-2)} - 2 - 2xV_m^{(m-1)} + (1+x^2)V_m^{(m)} = 0.$$

Ces relations nous montrent que les fonctions $V_m, V'_m, V''_m, \ldots, V_m^{(m)}$ jouissent des propriétés requises pour que le théorème de Sturm puisse leur être appliqué. En effet, la dernière $V_m^{(m)}$ ne change pas de signe, c'est une constante; deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur de x; si une fonction $V_m^{(\mu)}$ s'annule pour une valeur de x, les fonctions $V_m^{(\mu-1)}$ et $V_m^{(\mu+1)}$ prennent pour cette valeur de x des signes contraires; enfin V'_m est la dérivée de V_m. Il s'ensuit que, la suite $V_m, V'_m, \ldots, V_m^{(m)}$ ne présentant que des variations pour $x = -\infty$ et des permanences pour $x = +\infty$, la suite perd m variations quand x passe de $-\infty$ à $+\infty$; par suite, toutes les racines de l'équation $V_m = 0$ sont réelles et inégales.

3. Appliquons maintenant le théorème de Rolle pour établir la réalité de toutes les racines de $V_m = 0$.

Remarquons, à cet effet, que l'égalité (3) nous donne la relation

$$V''_m = -m(m-1)V_{m-2},$$

V_{m-2} étant ce que devient V_m quand on y remplace m par $m-2$, α restant le même, et supposons que les racines de $V_{m-2}=0$ soient réelles et inégales. Nous allons démontrer qu'il en est de même des racines de $V_m=0$.

Pour cela, considérons la seconde des équations différentielles du tableau précédent, à savoir :

$$(5)\quad (m-1)(m-2)V'_m - 2(m-2)xV''_m + (1+x^2)V'''_m = 0,$$

déduite de l'équation (4).

Les racines de V_{m-2} étant réelles et inégales et désignées par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ dans l'ordre croissant, substituons-les dans la relation (5) ; on aura le tableau suivant :

$$(m-1)(m-2)V'_m(\alpha_1) + (1+\alpha_1^2)V'''_m(\alpha_1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)(m-2)V'_m(\alpha_{m-2}) + (1+\alpha_{m-2}^2)V'''_m(\alpha_{m-2}) = 0,$$

car $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ sont racines de l'équation $V'''_m=0$.

Or, d'après le théorème de Rolle, les quantités

$$V'''_m(\alpha_1),\quad V'''_m(\alpha_2),\quad \ldots,\quad V'''_m(\alpha_{m-2})$$

ne présentent que des variations; il en est donc de même des quantités

$$V'_m(\alpha_1),\quad V'_m(\alpha_2),\quad \ldots,\quad V'_m(\alpha_{m-2}).$$

Mais on sait que, si toutes les racines de l'équation dérivée d'une équation proposée sont réelles et inégales, et si, substituées dans le premier membre de la proposée par ordre de grandeur, elles donnent des résultats de substitutions de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

Il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $V'_m=0$ sont réelles et inégales.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ les $(m-1)$ racines réelles de $V'_{m-1}=0$: en les substituant dans l'équation (4), on aura

$$m(m-1)V_m(b_1)+(1+b_1^2)V''_m(b_1)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$m(m-1)V_m(b_{m-1})+(1+b_{m-1}^2)V''_m(b_{m-1})=0;$$

mais, d'après le théorème de Rolle,

$$V''_m(b_1),\quad V''_m(b_2),\quad \ldots,\quad V''_m(b_{m-1})$$

sont alternativement de signes contraires; donc les quantités

$$V_m(b_1),\quad V_m(b_2),\quad \ldots,\quad V_m(b_{m-1})$$

ne présentent elles-mêmes que des variations. Il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $V_m=0$ sont réelles et inégales.

Nous avons supposé que l'équation $V_{m-2}=0$ a toutes ses racines réelles et inégales. Cette propriété se reconnaît immédiatement sur les équations

$$V_1=0 \qquad \text{et} \qquad V_2=0,$$

qui sont

$$V_1=2(x-\alpha),\qquad V_2=2[\alpha(x^2-1)+2x].$$

On en conclut que, d'une part, $V_{2n+1}=0$ a toutes ses racines réelles, et, d'autre part, que $V_{2n}=0$ a aussi toutes ses racines réelles; par suite, on peut dire d'une manière générale que l'équation $V_m=0$ a toutes ses racines réelles et inégales.