NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. RESAL

Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 57-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__57_0>

NOTE SUR LA COURBURE DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

PAR M. H. RESAL.

1. La formule que je vais établir est peut-être connue, mais je n'en ai trouvé de trace nulle part.

Soient

Oy l'axe de révolution;

m l'intersection d'une ligne géodésique donnée avec une courbe méridienne;

$R' = \overline{mN}$ la portion de la normale à cette courbe limitée à Oy;

R le rayon de courbure de la même courbe, considéré comme positif ou négatif selon qu'il aura ou non le même sens que $\overline{mN}$;

α l'inclinaison en m de la ligne géodésique sur la méridienne;

Ox un axe coordonné compris dans le plan yNm, perpendiculaire à Oy, la position de l'origine O restant indéterminée;

ρ le rayon de courbure en m de la ligne géodésique, et dont le signe déterminera le sens.

On a d'abord

$$\frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'} = \frac{1}{\rho}. \tag{1}$$

Je considérerai la ligne géodésique comme étant décrite par un point matériel soustrait à l'action de toute force extérieure, assujetti à rester sur la surface. D'après l'équation des forces vives, la vitesse v du mobile est constante et le principe des aires donne

$$v \sin\alpha\, x = \text{const.},$$

ou, en désignant par x_0, α_0 les valeurs de x, α qui se rapportent à un point déterminé de la ligne géodésique,

$$(2) \qquad x \sin\alpha = x_0 \sin\alpha_0 = \text{K}.$$

En éliminant α entre les équations (1) et (2), on trouve pour la formule cherchée

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\text{R}} + \left(\frac{1}{\text{R}'} - \frac{1}{\text{R}}\right)\text{K}^2 = \frac{x^2}{\rho}.$$

On tirera de cette formule des conséquences plus ou moins intéressantes lorsque la courbe méridienne sera une cycloïde, une chaînette, ou sera telle que

$$\frac{1}{\text{R}} + \frac{1}{\text{R}'} = \text{const.}$$

Mais je ne m'arrêterai qu'à l'application suivante.

2. *Surfaces de révolution du second degré.* — Soit

$$\text{A}x^2 + \text{B}y^2 = 1$$

l'équation de la courbe génératrice : on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{A}x}{\text{B}y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\text{A}}{\text{B}^2y^3}(\text{A}x^2 + \text{B}y^2) = -\frac{\text{A}}{\text{B}^2y^3};$$

on déduit de là

$$\pm\frac{1}{\text{R}} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{AB}}{(\text{A}^2x^2 + \text{B}^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\pm\frac{1}{\text{R}'} = \frac{\dfrac{dy}{dx}}{x\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\text{A}}{(\text{A}^2x^2 + \text{B}^2y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

1° *Ellipsoïde.* — On posera $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$ et l'on aura

(4) $$\frac{1}{R} = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(4') $$\frac{1}{R'} = \frac{b^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2(b^4 x^2 + a^4 y^2 - a^4 b^2)}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en éliminant y^2 au numérateur au moyen de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^4(b^2 - a^2)x^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)} = \frac{1}{a^4}\,\frac{(b^2 - a^2)x^2}{R}.$$

La formule (3) devient alors

(5) $$\frac{1}{R}\left[1 + \frac{K^2(b^2 - a^2)}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho}.$$

Il suit de là que *le rapport du rayon de courbure en un point de la ligne géodésique au rayon de courbure de l'ellipse méridienne menée par ce point est constant.* Ce théorème, qui paraît être dû à Gudermann (*Journal de Crelle*, t. 17), s'étend, comme on va le voir, aux autres surfaces de révolution du second degré.

2° *Paraboloïde.* — Si l'on pose $\frac{a^2}{b} = p$, puisque l'on suppose $a = \infty$, la formule (5) donne, pour le paraboloïde,

(6) $$\frac{1}{R}\left(1 + \frac{K^2}{p^2}\right) = \frac{1}{\rho}.$$

3° *Hyperboloïde à une nappe.* — On devra prendre $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{b^2}$. Les équations (4) et (4') s'appliquent ici; mais il faudra changer le signe du second membre de la première; on trouve ainsi

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}(b^4x^2 + a^4y^2 + a^4b^2)$$

$$= \frac{b^4}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}(a^2 + b^2)x^2 = -\frac{1}{a^4}\frac{(a^2+b^2)x^2}{R}$$

et la formule (3) devient

$$\frac{1}{R}\left[1 - \frac{K^2(a^2+b^2)}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho}. \tag{7}$$

4° *Hyperboloïdes à deux nappes.* — Les formules (4) et (4′) ne changent pas et l'on a

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2(b^4x^2 + a^4y^2 - a^4b^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{b^4(a^2+b^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)}x^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2}{a^4R},$$

et enfin la formule (3) donne

$$\frac{1}{R}\left[1 + \frac{K^2(a^2+b^2)}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho}. \tag{8}$$