NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. HUMBERT

Sur quelques propriétés métriques des courbes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 526-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__526_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES COURBES;

PAR M. G. HUMBERT,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Principes fondamentaux.

1. Dans un travail récent, publié au *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* nous avons démontré, par des considérations fondées sur le théorème d'Abel, un certain nombre de propriétés métriques des courbes algébriques : le but de cette Note est d'exposer une méthode élémentaire permettant d'arriver simplement à quelques-unes de ces propriétés, et se prêtant aisément à un grand nombre d'applications nouvelles.

Toute la théorie qui va être exposée repose sur les principes suivants :

Soit, en coordonnées homogènes $f(x, y, z) = 0$, une courbe algébrique plane quelconque de degré n; considérons un faisceau ponctuel de courbes de degré m, $F - u\varphi = 0$, où u désigne un paramètre variable. Une courbe de faisceau coupe la courbe fixe $f = 0$ en mn points, de coordonnées (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2), ... Désignons par $\frac{Q(x, y, z)}{V(x, y, z)}$ une fonction rationnelle de degré zéro en x, y, z, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes homogènes, Q et V de même degré, et proposons-nous d'étudier la somme des valeurs que prend cette fonction aux points communs à la courbe $f = 0$ et à une des courbes du faisceau $F - u\varphi = 0$. Cette somme, dont l'expression est

$$\sigma = \frac{Q(x_1, y_1, z_1)}{V(x_1, y_1, z_1)} + \frac{Q(x_2, y_2, z_2)}{V(x_2, y_2, z_2)} + \ldots,$$

est une fonction symétrique des coordonnées des points communs aux courbes $f=0$, $F-u\varphi=0$; elle s'exprime rationnellement en fonction des coefficients qui figurent dans l'équation de ces courbes; c'est donc, puisque le coefficient u est seul variable, une fonction rationnelle de u.

Que faut-il pour qu'elle soit constante, c'est-à-dire indépendante de u? Il est clair qu'il faut et qu'il suffit qu'elle ne devienne infinie pour aucune valeur, finie ou infinie de u. Or, si nous considérons les points fixes communs aux courbes $f=0$, $V=0$, nous voyons que la somme σ ne peut devenir infinie que si la courbe correspondante du faisceau $F-u\varphi=0$ passe par un de ces points, et, quand cette circonstance se présente, σ est généralement infini. Pour qu'il en soit autrement, il est *nécessaire* que deux ou plusieurs des termes de σ deviennent simultanément infinis, c'est-à-dire que la courbe $F-u\varphi=0$ considérée passe par deux ou plusieurs des points communs aux courbes $f=0$, $V=0$, ou bien touche en l'un d'eux la courbe $f=0$; mais rien ne prouve que cette condition nécessaire soit en même temps suffisante.

2. Il existe toutefois un cas particulier très étendu où l'on peut affirmer qu'elle est suffisante.

Supposons, pour fixer les idées, que les courbes $f=0$, $V=0$ ne soient tangentes entre elles en aucun de leurs points de rencontre, et que la courbe $Q=0$ ne passe par aucun de ces points; nous allons montrer que, si la courbe du faisceau $F-u\varphi=0$ qui passe par l'un d'eux touche en ce point la courbe $f=0$, la somme σ ne deviendra pas infinie pour la valeur correspondante de u.

Pour le démontrer, admettons que les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe $f=0$, dans le voisinage du point considéré, soient des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire t; soit t_0 la valeur du paramètre t qui correspond à un point où les courbes $V = 0, f = 0$ se rencontrent, et supposons qu'en ce point la courbe $F - u_0 \varphi = 0$ soit tangente, et plus généralement ait un contact d'ordre μ, avec la courbe $f = 0$. Si nous donnons au paramètre u une valeur voisine de u_0, $u_0 + h$, la courbe $F - (u_0 + h)\varphi = 0$ coupera $f = 0$ en $\mu + 1$ points voisins du point considéré; soient $t_0 + \theta_1$, $t_0 + \theta_2, \ldots, t_0 + \theta_{\mu+1}$ les valeurs du paramètre t qui correspondent respectivement à ces $\mu + 1$ points. Il y aura, dans la somme σ, $\mu + 1$ termes qui tendront vers l'infini quand h tendra vers zéro; ce seront les termes de la somme

$$\sigma' = \frac{Q}{V}(t_0 + \theta_1) + \frac{Q}{V}(t_0 + \theta_2) + \ldots,$$

en désignant par $Q(t_0 + \theta)$ la valeur que prend le polynôme $Q(x, y, z)$, quand on y remplace x, y, z par les coordonnées du point de la courbe $f = 0$, dont le paramètre est $t_0 + \theta$.

Or, on a

$$V(t_0 + \theta_i) = V(t_0) + \theta_i V'_{t_0} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu + 1);$$

$V(t_0) = 0$, $V'_{t_0} \gtrless 0$, puisque la courbe $V = 0$ passe par le point t_0 sans y toucher la courbe $f = 0$; de même, on a

$$Q(t_0 + \theta_i) = Q(t_0) + \ldots.$$

$Q(t_0)$ n'est pas nul par hypothèse, puisque la courbe $Q = 0$ ne passe pas par le point t_0. Il en résulte que, pour montrer que σ' a une limite finie pour $h = 0$, il suffit de le démontrer pour la somme

$$\sigma'' = \frac{Q(t_0)}{V'(t_0)}\left[\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \ldots + \frac{1}{\theta_{\mu+1}}\right].$$

Or, si nous posons $G = F - u_0\varphi$, les courbes $G = 0$ et $f = 0$ ont un contact d'ordre μ au point t_0; on a donc, d'après la théorie générale du contact,

$$(1)\qquad \begin{cases} G(t_0) \;\;= 0, & G'(t_0) = 0, \quad \ldots, \\ G^{(\mu)}(t_0) = 0, & G^{(\mu+1)}(t_0) \gtrless 0. \end{cases}$$

Écrivons maintenant que les points $t_0 + \theta_i$ sont sur la courbe $F - (u_0 + h)\varphi = 0$, c'est-à-dire $G - h\varphi = 0$. Il vient

$$G(t_0 + \theta_i) - h\varphi(t_0 + \theta_i) = 0,$$

d'où, en développant par la formule de Taylor et tenant compte des relations (1),

$$(2)\qquad \frac{1}{1.2\ldots\mu+1}\,\theta_i^{\mu+1} G^{(\mu+1)}(t_0) - h\,\varphi(t_0) = 0.$$

On voit ainsi que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\mu+1}$ sont les racines d'une équation binôme

$$\theta^{\mu+1} = A h;$$

par conséquent la somme de leurs inverses est nulle, et σ'' ne devient pas infini quand h tend vers zéro.

Ce raisonnement suppose toutefois que $\varphi(t_0)$ n'est pas nul. Or $\varphi(t_0)$ ne peut être nul que dans deux cas; on a, en effet,

$$F(t_0) - u_0\varphi(t_0) = 0,$$

et la condition $\varphi(t_0) = 0$ entraînerait, soit $u_0 = \infty$, soit $F(t_0) = 0$. Si u_0 était infini, on n'aurait eu qu'à écrire l'équation du faisceau sous la forme $\frac{1}{u}F - \varphi$, et le paramètre $\frac{1}{u}$ n'aurait plus été infini pour la courbe considérée.

Il ne reste donc que l'hypothèse $F(t_0) = 0$: les deux courbes $F = 0$, $\varphi = 0$ passent alors par le point t_0 de la courbe $f = 0$.

En ce cas, on peut supposer que les deux courbes $F = 0$, $\varphi = 0$ ont avec $f = 0$, au point t_0, un contact du même ordre, ν; s'il en était autrement, il suffirait de changer u en $\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$ pour se trouver dans notre hypothèse.

Supposons alors que la courbe $F - u_0 \varphi = 0$, ou $G = 0$, ait avec $f = 0$, au point t_0, un contact d'ordre μ, μ étant supérieur à ν.

On aura toujours

$$\sigma'' = \frac{Q(t_0)}{V'(t_0)}\left[\frac{1}{\theta_1} + \ldots + \frac{1}{\theta_{\mu+1}}\right]$$

et l'équation $G(t_0 + \theta_i) - h\varphi(t_0 + \theta_i)$ deviendra

$$\frac{1}{1.2\ldots\mu+1}\,\theta_i^{\mu+1}\,G^{(\mu+1)}(t_0) - \frac{h}{1.2\ldots\nu+1}\,\theta_i^{\nu+1}\,\varphi^{(\mu+1)}(t_0) = 0.$$

Cette équation donne $\nu + 1$ valeurs nulles pour θ, ce qui était à prévoir, puisque toutes les courbes $F - u\varphi$ ont avec $f = 0$, au point t_0, un contact d'ordre ν. Si l'on se débarrasse, dans la somme

$$\sum \frac{Q}{V},$$

des termes qui correspondent aux points *fixes* communs à la courbe $f = 0$ et aux courbes du faisceau, il suffira, dans σ'', de conserver les termes $\frac{1}{\theta}$ qui sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{(\mu+1)!}\,G^{(\mu+1)}(t_0).\theta^{\mu-\nu} - \frac{h}{(\nu+1)!}\,\varphi^{(\mu+1)}(t_0) = 0.$$

La somme des inverses de ces racines sera nulle si l'on a $\mu - \nu \geqq 2$; c'est-à-dire $\mu \geqq \nu + 2$. Il faudra donc que la courbe $F - u_0 \varphi = 0$ ait avec $f = 0$, au point t_0, un contact d'un ordre supérieur de deux unités à l'ordre du contact de $f = 0$ avec $F = 0$ ou $\varphi = 0$ en ce point.

3. De toute cette discussion, qu'il serait facile de compléter en étudiant le cas où la courbe $V = 0$ serait tangente à la courbe $f = 0$, au point t_0, résulte le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME. — *La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle,* $\frac{Q}{V}(x, y, z)$, *homogène et de degré zéro, aux points variables communs à une courbe algébrique,* $f = 0$, *et à chacune des courbes d'un faisceau, reste constante si les courbes du faisceau qui passent respectivement par les points d'intersection des courbes* $f = 0$, $V = 0$, *rendant la fonction* $\frac{Q}{V}$ *infinie, ont, en chacun de ces points, avec la courbe* $f = 0$, *un contact d'un ordre au moins égal à la différence entre les ordres des contacts de la courbe* $f = 0$ *avec les courbes* $V = 0$ *et* $Q = 0$ *au point considéré.*

Si la courbe $Q = 0$ ne passe pas par ce point, on devra, pour appliquer le théorème, regarder l'ordre de son contact avec $f = 0$ comme égal à -1 : il suffira alors que la courbe du faisceau, passant par le point considéré, y ait, avec la courbe $f = 0$, un contact d'ordre plus élevé que l'ordre du contact de $f = 0$ avec $V = 0$.

Enfin, si toutes les courbes du faisceau passent par un point commun à $f = 0$, $V = 0$, et ont en ce point avec $f = 0$ un contact d'ordre ν, on devra, pour appliquer le théorème, regarder comme courbe du faisceau passant par le point celle qui a en ce point avec $f = 0$ un contact d'ordre $\nu + 1$.

Il resterait, pour ne laisser aucune hypothèse de côté, à examiner le cas où quelques-uns des points communs aux courbes $V = 0$ et $f = 0$ seraient des points multiples de cette dernière; cette étude demanderait des considérations d'un ordre un peu plus élevé; nous dirons seulement que l'existence d'un point multiple à m branches séparées n'introduit aucune modification dans le théorème; on le considérera comme formé par la réunion de m points distincts, correspondant chacun à une des branches.

4. *Remarque I.* — Nous avons admis, dans ce qui précède, que les courbes sécantes formaient un faisceau $F - u\varphi = 0$.

Le théorème s'applique, ainsi que la démonstration, si les courbes sécantes ont une équation de la forme $F(x, y, z, u) = 0$, F étant une fonction algébrique de x, y, z, u.

On devra seulement supposer que F'_u n'est pas nul dans l'équation

$$\frac{1}{1.2\ldots(\mu+1)} F^{(\mu+1)}(t_0).\theta_t^{\mu+1} + hF'_u = 0,$$

qui remplace l'équation (2). Cela revient à dire qu'aucun des points communs aux courbes $f = 0$, $V = 0$ n'est sur l'enveloppe des courbes $F(x, y, z, u) = 0$.

Nous ne ferons pas usage, dans cette Note, de la proposition ainsi généralisée, qui se prête moins bien aux applications que le théorème primitif.

5. *Remarque II.* — On peut supposer que Q et V dépendent non seulement de x, y, z, mais aussi de u. On aura toujours

$$Q(t_0 + \theta_t, u_0 + h) = Q(t_0, u_0) + \ldots$$

et

$$V(t_0 + \theta_t, u_0 - h) = V(t_0, u_0) + \theta_t V'_{t_0} + hV'_{u_0}.$$

Mais h est infiniment petit par rapport à θ_i, puisque $\theta_i^{\mu+1}$ est de l'ordre de h; il en résulte que $V(t_0+\theta_i, u_0+h)$ se réduit à $\theta_i V_{t_0}$, et la démonstration faite plus haut est applicable.

6. Corollaire I. — Observons que, d'après le théorème du n° 3, la somme des valeurs de $\frac{Q}{V}$ aux points communs à $f=0$ et $F-u\varphi=0$ reste constante si une *même* courbe du faisceau $F-u\varphi=0$ passe par tous les points communs à $f=0$ et $V=0$, en satisfaisant, en chacun de ces points, aux conditions énoncées.

En particulier, si $V=0$ ne touche $f=0$ en aucun point, la somme des valeurs de $\frac{Q}{V}$ restera constante si, parmi les courbes du faisceau sécant, il en est une qui touche la courbe $f=0$ en tous les points de cette courbe où $\frac{Q}{V}$ devient infinie.

7. Corollaire II. — Un autre cas particulier du théorème fondamental nous sera utile dans les applications.

Supposons que les points de la courbe $f=0$, où la fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ de degré zéro devient infinie, soient tous des points d'inflexion de f, et que la fonction $\frac{Q}{V}$ soit infinie du premier ordre en chacun de ces points (1).

Prenons pour faisceau sécant le faisceau des courbes

(1) Le sens de cette expression est le suivant : Si $V=0$ a un contact d'ordre $\mu-1$ avec $f=0$ au point considéré, il faut que $Q=0$ ait avec cette dernière courbe, au même point, un contact d'ordre $\mu-2$.

qui coupent respectivement $f = 0$ aux points de contact des tangentes communes à cette courbe et à chacune des courbes d'un faisceau *tangentiel* donné.

Je dis que la somme des valeurs de la fonction $\frac{Q}{V}$, aux points communs à $f = 0$ et à chacune des courbes du faisceau ponctuel considéré, demeure constante.

Il suffit, pour cela, de montrer que la courbe du faisceau ponctuel qui passe par un des points d'inflexion donnés sur la courbe $f = 0$ touche cette courbe en ce point, ce qui est évident, puisque la tangente d'inflexion correspondante doit être comptée deux fois parmi les tangentes communes à la courbe $f = 0$ et à la courbe du faisceau tangentiel qui touche cette droite. Donc :

Soit $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ une fonction rationnelle quelconque, de degré zéro, ne devenant infinie, sur une courbe algébrique $f(x, y, z) = 0$, qu'en des points d'inflexion de cette courbe, et étant infinie du premier ordre seulement en ces points.

La somme des valeurs que prend cette fonction aux points de contact de la courbe $f = 0$ et des tangentes communes à cette courbe et à une autre courbe algébrique de classe donnée reste fixe quand cette dernière varie d'une manière quelconque.

Nous allons faire maintenant quelques applications du théorème fondamental et de ses deux corollaires.

Centres des moyennes distances.

8. Soit $\frac{Q}{V} = \frac{x}{z}$; la somme des valeurs de $\frac{Q}{V}$ sera égale à mn fois l'abscisse du centre des moyennes distances des points communs à la courbe $f = 0$ et aux courbes

$F - u\varphi = 0$. Nous avons donc les propositions suivantes, en observant que la courbe $V = 0$ est la droite de l'infini :

I. *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et à chacune des courbes d'un faisceau reste fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à l'une des courbes du faisceau.*

II. *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et à chacune des courbes d'un faisceau reste fixe si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la première courbe.*

En particulier, cette dernière proposition s'applique si l'une des courbes du faisceau comprend la droite de l'infini comptée deux fois, car cette courbe est bien tangente à la courbe fixe en tous les points à l'infini de cette dernière. Les courbes du faisceau sécant ont alors mêmes asymptotes. Donc :

III. *Le centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques reste fixe si l'une de ces courbes varie en restant asymptote à elle-même.*

Ce dernier théorème est dû à Liouville; un cas particulier intéressant est le suivant :

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique et à une série de cercles concentriques est fixe.

On peut remplacer la courbe par le système de ses asymptotes sans changer le centre des moyennes distances dont il s'agit; par suite :

Le centre des moyennes distances des points com-

muns à un cercle et à une courbe algébrique est aussi celui des projections du centre du cercle sur les asymptotes de la courbe.

9. Les applications des trois propositions précédentes peuvent être variées presque indéfiniment; nous nous bornerons à quelques exemples particulièrement simples.

Menons à la courbe $f = 0$ les tangentes parallèles à une même direction; les points de contact sont sur les courbes $f'_x + uf'_y = 0$. La courbe de ce faisceau, qui passe par un point à l'infini sur $f = 0$, touche en ce point cette dernière courbe, car l'asymptote correspondante compte pour deux dans le nombre des tangentes qu'on peut mener à $f = 0$ parallèlement à sa direction.

On est donc placé dans le cas de la proposition I, et l'on obtient ce théorème bien connu, dû à Chasles :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées à une courbe algébrique parallèlement à une même direction reste fixe quand cette direction varie.

10. Dans le cas où la courbe $f = 0$ a toutes ses asymptotes d'inflexion, la droite $z = 0$ ne rencontre cette courbe qu'en des points d'inflexion, et l'on peut appliquer le corollaire II du théorème fondamental. Donc :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées par un point quelconque du plan à une courbe algébrique ayant toutes ses asymptotes d'inflexion est un point fixe.

Ce point est aussi le centre des moyennes distances des points de contact, avec la courbe considérée, des *tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque.*

Ces deux propositions s'appliquent à un grand nombre de courbes connues; nous citerons en particulier le folium de Descartes, la lemniscate de Bernoulli, les courbes dont l'équation polaire est $\rho^n = \mathrm{A} \cos n\omega$, où n est un entier positif au moins égal à 2, etc.

11. Le cas des courbes du troisième degré à point double, ayant leurs trois asymptotes d'inflexion, est particulièrement simple. Si l'on mène des tangentes à la courbe par le point double, les points de contact sont tous confondus en ce point, qui est dès lors le centre des moyennes distances fixe des théorèmes précédents. En particulier, on voit que :

Si, par un point a d'une cubique à point double, ayant ses trois asymptotes d'inflexion, on mène à la courbe les deux tangentes dont les points de contact, b et c diffèrent de a, la droite qui joint a au milieu du segment bc passe par le point double, qui la partage en deux parties égales.

Ce théorème pourrait servir de base à une étude géométrique des cubiques dont il s'agit.

De même, dans le cas de la lemniscate, le centre des moyennes distances des points considérés est aussi le point double à distance finie : il suffit, pour le voir, d'imaginer que le point par lequel on mène les tangentes coïncide avec ce point double. On peut donc dire que :

Le centre des moyennes distances des points de contact d'une lemniscate avec les tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque est le centre de la lemniscate.

Centres des moyennes harmoniques.

12. Poncelet appelle centre des moyennes harmoniques de n points $A_1, A_2, \ldots$, par rapport à une droite Δ, un point qui jouit de la propriété suivante : Soit D une droite quelconque passant par ce point. Appelons d_1, $d_2, \ldots$ les distances de $A_1, A_2, \ldots$ à cette droite et δ_1, $\delta_2, \ldots$ les distances de ces points à la droite fixe Δ : on aura

$$\sum \frac{d_i}{\delta_i} = 0.$$

Il en résulte que, si l'on prend un triangle de référence dont le côté $z = 0$ soit la droite Δ, le centre des moyennes harmoniques sera défini par les relations

$$n\frac{x}{z} = \sum \frac{x_i}{z_i}, \qquad n\frac{y}{z} = \sum \frac{y_i}{z_i},$$

x_i, y_i, z_i étant les coordonnées homogènes du point A_i.

On peut faire pour le centre des moyennes harmoniques la même théorie que pour celui des moyennes distances : il suffit de transformer les théorèmes précédents par perspective, en faisant correspondre la droite de l'infini de l'ancien plan avec la droite Δ du nouveau ; aussi n'insisterons-nous sur ce point que dans le cas spécial des courbes du troisième ordre.

On sait qu'une cubique a neuf points d'inflexion, situés trois à trois en ligne droite. On appelle *triangle inflexionnel* un triangle dont chaque côté passe par trois points d'inflexion, aucun des sommets ne coïncidant avec un tel point. Il y a quatre triangles inflexionnels.

Il résulte de la proposition du n° 10 que *si l'on mène à une cubique des tangentes par un point quelconque de son plan, le centre des moyennes harmoniques des* *points de contact par rapport à l'un des côtés d'un triangle inflexionnel est un point fixe.*

Il est intéressant de déterminer ce point fixe.

Mettons l'équation de la cubique sous la forme canonique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6\lambda xyz = 0. \tag{3}$$

Les droites $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sont les trois côtés d'un triangle inflexionnel.

Menons à la cubique des tangentes par le point $x = 0$, $y = 0$; les six points de contact seront sur la conique

$$z^2 + 2\lambda xy = 0. \tag{4}$$

Le centre des moyennes harmoniques de ces six points, par rapport à la droite $z = 0$, sera déterminé par les relations

$$6\frac{x}{z} = \sum \frac{x_i}{z_i}, \qquad 6\frac{y}{z} = \sum \frac{y_i}{z_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Pour évaluer $\sum \frac{x_i}{z_i}$, éliminons y entre les équations (3) et (4); il vient

$$8\lambda^3 x^6 - 18\lambda^3 x^3 z^3 - z^6 = 0;$$

d'où, puisque le terme en x^5 manque,

$$\sum \frac{x_i}{z_i} = 0.$$

On a de même

$$\sum \frac{y_i}{z_i} = 0$$

et, pour les coordonnées du point cherché,

$$\frac{x}{z} = 0, \qquad \frac{y}{z} = 0;$$

c'est-à-dire

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

13. On peut donc compléter ainsi le théorème précédent :

Si l'on mène à une cubique des tangentes par un point quelconque de son plan, le centre des moyennes harmoniques des six points de contact, par rapport à un côté d'un triangle inflexionnel, coïncide avec le sommet opposé de ce triangle.

De même, et plus généralement :

Le centre des moyennes harmoniques, par rapport à un côté d'un triangle inflexionnel, des points de contact de la cubique et des tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque, coïncide avec le sommet opposé du triangle considéré.

Polaires.

14. Si l'on transforme par polaires réciproques la définition du centre des moyennes harmoniques de n points par rapport à un axe, on retombe sur une notion bien connue, en Géométrie, celle de la *polaire* d'un point par rapport à n droites. On connaît la définition de la polaire d'un point par rapport à une courbe; celle de la polaire d'un point, par rapport à un système de droites, est la même; rappelons-la en quelques mots. Si, par le point considéré O, on mène une sécante quelconque coupant la courbe aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et si l'on prend sur la droite le point M, tel que

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots,$$

le point M décrit, quand la sécante tourne autour du point O, la polaire de ce point par rapport à la courbe.

En transformant, par réciprocité, les propriétés relatives aux centres des moyennes harmoniques, on obtient, en particulier, les théorèmes suivants :

La polaire d'un point fixe O, *par rapport aux tangentes communes à une courbe algébrique* C *et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel, est une droite fixe, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui touche la courbe* C *en tous les points de contact de cette courbe avec les tangentes qu'on peut lui mener du point* O.

La polaire du point O *reste également fixe si toutes les courbes du faisceau ont les mêmes tangentes issues de* O, *et les mêmes points de contact avec ces tangentes.*

Exemple. — La polaire du centre d'un cercle par rapport aux tangentes communes à ce cercle et à une courbe algébrique quelconque reste fixe si le rayon du cercle varie, le centre restant fixe.

15. Aux courbes ayant leurs asymptotes d'inflexion correspondent, par réciprocité, des courbes telles que les tangentes qu'on peut leur mener d'un point du plan soient toutes de rebroussement; le théorème du n° 10 se transforme ainsi :

Si toutes les tangentes qu'on peut mener à une courbe par un point de son plan sont des tangentes de rebroussement, la polaire de ce point par rapport aux tangentes menées à la courbe en ses points de rencontre avec une courbe algébrique quelconque est une droite fixe.

Ce théorème s'applique, en particulier, à l'hypocycloïde à trois rebroussements, aux développées des coniques, etc.

Propriétés de la lemniscate.

16. La lemniscate est une courbe du quatrième degré à trois points doubles; deux sont les points cycliques du plan, l'autre est le centre de la courbe; en chacun de ces points, les deux tangentes à la courbe sont d'inflexion. Il en résulte que, le centre étant pris pour origine, les trois droites $x + iy = 0$, $x - iy = 0$, $z = 0$ ne coupent la courbe qu'en des points d'inflexion. Par conséquent, en appliquant le corollaire du n° 7, on voit que, si l'on mène les tangentes communes à la lemniscate et à une courbe quelconque de classe donnée, les fonctions symétriques suivantes des coordonnées x, y des points de contact de ces tangentes avec la lemniscate restent constantes :

$\sum \frac{x}{z}$, $\sum \frac{y}{z}$; nous avons déjà énoncé le théorème correspondant (n° 11);

$$\sum \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \sum \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \sum \frac{y^2}{x^2+y^2};$$

$\sum \frac{x^2+y^2}{z^2}$; car $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ devient infini du premier ordre seulement aux deux points cycliques;

$\sum \frac{xz}{x^2+y^2}$, $\sum \frac{yz}{x^2+y^2}$; car $\sum \frac{xz}{x^2+y^2}$ devient infini, et du premier ordre seulement, à l'origine.

Pour interpréter ce dernier résultat, nous rappellerons une définition due à Laguerre,

Laguerre appelle *centre harmonique* d'un système de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, par rapport à un pôle O, un point ainsi défini : sur les directions $OA_1, OA_2, \ldots$, on porte des longueurs égales à $\frac{1}{OA_1}, \frac{1}{OA_2}, \cdots$ et on les compose comme des forces : soit OR_1 la résultante.

Portons sur OR une longueur $OR_1 = \frac{n}{OR_1}$, le point R sera le centre harmonique. Si $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ sont ses coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires passant par O, on a

$$\frac{nxz}{x^2+y^2} = \sum \frac{x_i z_i}{x_i^2+y_i^2}, \qquad \frac{nyz}{x^2+y^2} = \sum \frac{y_i z_i}{x_i^2+y_i^2}.$$

Nous pouvons énoncer maintenant les propriétés suivantes :

Menons les tangentes communes à une lemniscate et à une courbe algébrique qui varie d'une manière quelconque, en conservant sa classe, et considérons les points de contact de la lemniscate avec un des systèmes de tangentes communes :

1° *Le centre des moyennes distances de ces points de contact reste fixe.*

2° *Le centre harmonique du centre de la lemniscate par rapport à ces points reste fixe.*

3° *La somme des carrés des distances de ces points au centre de la lemniscate reste fixe.*

4° *La somme des carrés des sinus ou des cosinus des angles que font les rayons vecteurs correspondants avec un des axes de la courbe reste fixe.*

Applications diverses.

17. Soit C une courbe algébrique ; par un point M de son plan menons-lui des normales ; soient P le pied de l'une d'elles, R le centre de courbure en P. Nous allons démontrer qu'on a, quand M varie,

$$\sum \frac{MP}{MR} = \text{const.}$$

la somme étant étendue à toutes les normales issues de M.

Soient, en effet, ν la longueur MP, ρ le rayon de courbure PR ; on a

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MR}} = \frac{\nu}{\nu - \rho}.$$

On va montrer d'abord que $\frac{\nu}{\nu-\rho}$ est une fonction rationnelle des coordonnées des points M et P.

Soient α et β les coordonnées de M; ξ et η celles de P. On a

$$\nu^2 = (\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2,$$
$$\rho^2 = \frac{[f'^2_\xi + f'^2_\eta]^3}{\mathrm{H}^2},$$

H étant un polynôme entier. Or, la normale MP passant par M, on a

$$\frac{\xi - \alpha}{f'_\xi} = \frac{\eta - \beta}{f'_\eta},$$

d'où

$$\nu^2 = \frac{(\xi - \alpha)^2}{f'^2_\xi} [f'^2_\xi + f'^2_\eta]$$

et enfin

$$\frac{\nu}{\nu - \rho} = \frac{\xi - \alpha}{(\xi - \alpha) - f'_\xi \dfrac{f'^2_\xi + f'^2_\eta}{\mathrm{H}}},$$

ce qui est bien une fonction rationnelle. La valeur de cette fonction définit, d'ailleurs, d'une façon précise la quantité $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MR}}$. Cela posé, supposons que M décrive l'axe des x, on aura

$$\beta = 0.$$

$\frac{\nu}{\nu-\rho}$ sera fonction rationnelle de ξ, η et α. Il résulte de la *Remarque II* du n° 5, que la somme

$$\sum \frac{\nu}{\nu - \rho} = \sum \frac{1}{1 - \frac{\rho}{\nu}}$$

étendue aux points d'intersection des courbes

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi f'_{\eta} - \eta f'_{\xi} - \alpha f'_{\eta} = 0$$

sera constante, si, toutes les fois que la seconde passe par un point de $f = 0$ tel que $1 - \frac{\rho}{\nu}$ soit nul, elle touche en ce point la courbe $f = 0$. Or, si $1 - \frac{\rho}{\nu} = 0$, on a $\rho = \nu$, et le point M coïncide avec le centre de courbure R de la courbe en P; deux des normales menées à la courbe par M ont donc leur pied en P, et la courbe

$$\xi f'_{\eta} - \eta f'_{\xi} - \alpha f'_{\eta} = 0$$

touche au point P la courbe $f = 0$. Il en résulte bien que $\sum \frac{\nu}{\nu - \rho}$ est constant; on a donc, comme on l'avait annoncé,

$$\sum \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MR}} = \text{const.}$$

la somme étant étendue à toutes les normales menées du point M à la courbe.

18. Pour terminer ces applications, considérons une courbe algébrique C, et un cercle Σ, de centre O. Menons les tangentes communes à la courbe et au cercle; soit t la longueur d'une de ces tangentes comprise entre les deux points de contact. Nous allons montrer qu'on a

$$\sum \frac{1}{t} = \text{const.}$$

quand le rayon du cercle varie, le centre O restant fixe. En effet, supposons que le cercle ait pour équation

$$\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0.$$

Soit ξ, η un point de la courbe $f = 0$, tel que la tangente en ce point à la courbe touche le cercle. On aura

$$[\xi f'_\xi + \eta f'_\eta]^2 = R^2 (f'^2_\xi + f'^2_\eta)$$

et

$$t^2 = \xi^2 + \eta^2 - R^2,$$

c'est-à-dire

$$t^2 = \frac{(\xi^2 + \eta^2)(f'^2_\xi + f'^2_\eta) - (\xi f'_\xi + \eta f'_\eta)^2}{f'^2_\xi + f'^2_\eta} = \frac{(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi)^2}{f'^2_\xi + f'^2_\eta}$$

et enfin

$$t^2 = \frac{(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi)^2}{(\xi f'_\xi + \eta f'_\eta)^2} R^2$$

ou

$$t = \frac{\xi f'_\eta - \eta f'_\xi}{\xi f'_\xi + \eta f'_\eta} R.$$

On voit que t est fonction rationnelle de ξ, η et R.

Faisons varier R; la somme $\sum \frac{1}{t}$ étendue aux points communs aux courbes

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad (\xi f'_\xi + \eta f'_\eta)^2 - R^2 (f'^2_\xi + f'^2_\eta) = 0$$

ne peut devenir infinie que si une des quantités t devient nulle. Cette circonstance ne peut se présenter que dans deux cas :

1° Ou bien les deux points de contact de la tangente avec le cercle et la courbe coïncident; le cercle est alors tangent à la courbe, et deux des tangentes communes coïncident avec la tangente considérée;

2° Ou bien la direction de la tangente commune est une des directions cycliques du plan : ce cas ne peut se présenter, pour une courbe C réelle, que si le centre du cercle est un foyer de la courbe. En excluant ce cas, il résulte de ce qui précède et du théorème général que $\sum \frac{1}{t}$ ne devient pas infini ; donc :

Si l'on mène les tangentes communes à un cercle et à une courbe algébrique, n'ayant pas pour foyer le centre du cercle, la somme des inverses des longueurs de ces tangentes reste constante quand le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.

Si le cercle se réduit à un cercle de rayon nul, les tangentes communes à la courbe et au cercle se confondent deux à deux, et l'on voit aisément que deux tangentes confondues doivent être prises avec des signes contraires. La somme des inverses de leurs longueurs est donc nulle ; par conséquent :

La somme algébrique des inverses des longueurs des tangentes communes à un cercle et à une courbe algébrique est nulle, si le centre du cercle n'est pas un foyer de la courbe.