NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE LÉVY

Sur le principe de l'énergie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 505-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__505_0>

SUR LE PRINCIPE DE L'ÉNERGIE;

PAR M. MAURICE LÉVY,
Membre de l'Institut ([1]).

Sources de travail; énergie.

1. Tout travail mécanique suppose la coexistence des deux éléments : force et vitesse. Un seul de ces éléments suffit pour constituer une *source* de travail; car, si l'on possède soit de la force, soit de la vitesse, on peut toujours, à l'aide d'un mécanisme convenable, l'utiliser à vaincre des résistances, c'est-à-dire à produire du travail.

Il est d'ailleurs évident que réciproquement la possession de l'un des deux éléments constitutifs du travail (ou, ce qui revient au même, la possession de matières telles qu'un combustible, une pile, etc., propres à *fabriquer* un tel élément, si on ne le possède pas directement) est aussi nécessaire pour constituer une source de travail.

Il résulte de là que toutes les sources de travail, si variées qu'elles nous apparaissent dans la nature, se réduisent, en dernière analyse, à deux espèces : celles qui sont alimentées par de la force et celles qui sont alimentées par de la vitesse ou du mouvement.

Le travail utile maximum que peut fournir une source quelconque de travail se nomme l'*énergie* de cette source.

([1]) Leçon professée au Collège de France en 1880 et, depuis, partiellement, à l'École centrale des Arts et Manufactures.

L'énergie des sources alimentées par de la force est qualifiée *potentielle*; l'énergie des sources alimentées par du mouvement est qualifiée *cinétique* (ou parfois *actuelle*).

A présent, ces deux espèces d'énergie, les seules, d'après ce qui précède, pouvant être distinctes, le sont-elles réellement?

Il serait téméraire, dans l'état actuel de la Science, d'essayer de trancher une telle question. Il arrivera peut-être un jour où tous les phénomènes mécaniques s'expliqueront par de simples transformations de mouvement opérées par l'intermédiaire de l'éther considéré comme mécanisme de liaison entre tous les corps de la nature, et où, par suite, la notion de force et, avec elle, celle d'énergie potentielle disparaîtront de la Science. Alors il serait établi que l'énergie, sous quelque forme qu'elle se présente à nous dans l'univers est *une*. Jusque-là, il convient d'envisager deux espèces d'énergie, mais deux seulement.

On parle souvent d'énergie mécanique, d'énergie calorifique, d'énergie électrique, d'énergie magnétique ou électro-magnétique.

Ces qualificatifs, il importe de ne pas l'oublier, ne servent qu'à désigner la provenance matérielle de ces diverses énergies; mais ils ne dispensent pas de rechercher, pour chacune d'elles, si elle est cinétique ou potentielle.

Expressions mathématiques des deux espèces d'énergie.

2. Considérons un système matériel en mouvement sous l'influence de forces quelconques extérieures ou intérieures.

L'énergie cinétique du système à un instant quelconque t est le travail utile maximum qu'il est possible de se procurer en n'utilisant que les vitesses acquises, à cet instant, par les divers points du système, sans utiliser aucune des forces qui le sollicitent.

L'énergie potentielle du système, à l'instant t, est, de même, le travail utile maximum qu'il est possible de se procurer à partir de cet instant en n'utilisant que les forces *intérieures* du système sans utiliser les vitesses acquises de ses points, ni les forces extérieures, même si ces dernières forces se trouvaient être utilisables, c'est-à-dire non résistantes.

Les forces extérieures, en effet, ou actions des corps extérieurs sur le système matériel considéré, ont leur source en dehors de ce système; celui-ci les subit, mais n'est pour rien dans leur existence, et elles ne sont pour rien dans ses facultés et, en particulier, dans sa faculté de produire du travail. Elles ne doivent donc pas intervenir dans la définition de son énergie potentielle.

On appelle *énergie totale*, ou simplement *énergie* d'un système matériel à un instant t, la somme de ses énergies cinétique et potentielle à cet instant.

L'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale sont, par définition, trois nombres *essentiellement positifs de kilogrammètres*.

Théorème I. — *L'énergie cinétique d'un système matériel à un instant quelconque est égale à sa demi-force vive à cet instant.*

Considérons, en effet, un système matériel en mouvement et concevons qu'à un instant quelconque t on supprime toutes les forces qui le sollicitent, de façon à ne disposer que de ses vitesses acquises à cet instant. Pour utiliser ces vitesses à la création d'un travail, concevons qu'on attelle chaque point du système à un fil placé dans la direction de la vitesse acquise par ce point, à l'arrière de cette vitesse, et qu'après avoir assujetti ce fil à passer par un point fixe (ou au travers d'un petit œil fixe) on attache un poids à son extrémité librement pendante.

Pendant les premiers instants qui suivront celui où l'on a supprimé les forces, chacun des poids sera soulevé en vertu de la vitesse du point matériel auquel il est attelé. Donc le centre de gravité de l'ensemble des poids sera lui-même soulevé pendant un temps plus ou moins long. Le produit du poids total P attaché aux extrémités des divers fils, par la hauteur maxima à laquelle on peut ainsi élever son centre de gravité, représente le travail utile maximum qu'il est possible d'obtenir en utilisant les vitesses acquises, à l'aide de ce mécanisme. Or, si l'on désigne par Σmv^2 la force vive du système à l'instant t, par $\Sigma mv'^2$ sa force vive à un instant postérieur t', par z la hauteur dont s'est élevé le centre de gravité pendant l'intervalle de temps $t'-t$, le théorème des forces vives appliqué à cet intervalle de temps donne

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv'^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = -\mathrm{P}z,$$

d'où

$$\mathrm{P}z = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv'^2.$$

Le premier terme du second membre est une grandeur fixe; le second est seul variable avec le temps t'. Donc, le premier membre devient maximum à l'instant où le terme soustractif $\Sigma mv'^2$ est devenu aussi petit que possible, c'est-à-dire nul. Et comme il est composé de termes tous positifs, il ne peut s'annuler que si chacun de ses termes s'annule séparément, c'est-à-dire si toutes les vitesses v' sont devenues nulles. Jusque-là, le centre de gravité des poids s'élève; à partir de ce moment, il s'abaisse, le système des poids entraînant les points du système matériel au lieu d'être soulevé par eux.

Ainsi, si on appelle h la valeur maxima de z, on aura

$$Ph = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2.$$

Il est clair que si l'on avait utilisé les vitesses données à vaincre des résistances autres que la pesanteur et à l'aide de quelque mécanisme que ce fût, les mêmes raisonnements eussent conduit à la même valeur du travail utile maximum obtenu.

Théorème II. — *L'énergie potentielle d'un système matériel à un instant quelconque t est égale au travail, essentiellement positif, des forces* intérieures *du système matériel, lorsqu'il passe de la position qu'il occupe à l'instant considéré, à sa position d'équilibre stable.*

On sait, et nous admettons que les forces intérieures d'un système matériel dérivent d'une fonction de forces, c'est-à-dire que le travail de ces forces, lorsque le système passe d'une position à une autre, ne dépend que de ces positions et non de la façon dont il est passé de l'une à l'autre.

S'il n'en était pas ainsi, le théorème que nous voulons établir n'aurait aucun sens.

Soient donc (A) la position du système à l'instant t et V la valeur correspondante positive ou négative de la fonction des forces intérieures, V étant ainsi une fonction des coordonnées des divers points du système, à l'instant considéré.

Supposons que le système passe de la position (A) à une nouvelle position quelconque (A′) et soit V′ la nouvelle valeur de la fonction V.

Le travail des forces intérieures, pour ce déplacement, est, comme on sait, égal à l'accroissement correspondant positif ou négatif

$$V' - V$$

de la fonction des forces.

Comme le second terme de cette différence est une quantité donnée, la différence devient maxima en même temps que son premier terme V'. Donc, pour avoir l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire le travail maximum qu'il est possible de se procurer en utilisant ses forces intérieures, il faut amener le système de la position (A) qu'il occupe à l'instant considéré à la position (A') pour laquelle la fonction des forces atteint sa valeur maxima. Mais on sait que cette position est la position d'équilibre stable, ce qui établit la proposition énoncée.

Remarque. — Si la fonction V présentait plusieurs maxima, c'est-à-dire si le système admettait plusieurs positions d'équilibre stable, il faudrait choisir celle qui répond au plus grand de tous les maxima de V. Soit C ce plus grand maximum et désignons par Π l'énergie potentielle du système à l'instant t ; on aura

$$\Pi = C - V,$$

c'est-à-dire que *l'énergie potentielle d'un système à un instant quelconque s'obtient en retranchant la valeur de la fonction de ses forces intérieures à cet instant d'une constante* C *représentant la plus grande valeur possible de cette fonction.*

Les deux grandeurs C et V peuvent être positives ou négatives; mais, comme cela doit être, leur différence est essentiellement positive ou nulle. Elle est nulle pour $V = C$, c'est-à-dire que *l'énergie potentielle d'un système matériel placé dans la position d'équilibre stable est nulle.*

Exemples ; réflexions sur la difficulté de qualifier certaines énergies.

3. Avant d'aller plus loin, nous allons éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

a. Nous avons déjà vu (n° 2) comment on peut utiliser les vitesses d'un système matériel quelconque pour produire du travail.

A présent, considérons, au contraire, un système matériel soumis à des forces quelconques ; mais plaçons-le sans vitesse dans une position d'équilibre *instable*. Il restera en repos. Ainsi, ici on n'a à sa disposition que l'élément force. Mais si on dérange le système infiniment peu, ce qui ne coûte pas de travail, il se mettra en mouvement et le travail des forces qui le sollicitent sera, du moins pendant un certain temps, essentiellement positif et, par suite, utilisable. Ainsi, un pendule placé au haut de sa course ne produit naturellement pas de travail tant qu'il est en repos ; mais si on le dérange infiniment peu, le travail de la pesanteur sera positif pendant toute la durée de la descente et l'on pourra, à l'aide d'une poulie, utiliser son mouvement à soulever un poids ou vaincre toute autre résistance.

b. Supposons un pendule maintenu en repos dans une position inclinée à l'aide d'un fil attaché à un point fixe, le fil ayant strictement la résistance voulue pour pouvoir soutenir le pendule. Ici encore, on dispose d'une force : le poids du pendule, mais sans vitesse. Mais, si l'on rompt le fil, ce qui, par hypothèse, n'exige qu'un effort infiniment petit, le pendule se mettra en mouvement et, pendant sa descente, permettra encore de produire un travail.

c. Supposons de même, un ressort comprimé et maintenu ainsi par un fil qui ait strictement la résistance voulue pour pouvoir remplir cet office. On dispose encore d'une force : la force de tension du ressort. Mais si l'on rompt le fil, ce qui, par hypothèse, n'exige qu'un effort infiniment petit, on se procurera la vitesse : le ressort se mettra en mouvement et permettra, en se détendant, de vaincre des résistances qu'on lui opposerait. Le maximum du travail qu'il est possible d'obtenir se produira naturellement quand le ressort sera complètement détendu. C'est ce travail accompli depuis la position initiale du ressort jusqu'à sa position naturelle qui mesure l'énergie que possédait le ressort dans l'état de tension où on l'avait maintenu.

d. Supposons un réservoir renfermant de l'eau à un niveau supérieur à celui de la nappe ambiante, ce réservoir étant fermé par un robinet. Si l'on ouvre le robinet, l'eau, en tombant, permettra de faire tourner une roue hydraulique et de vaincre une force résistante appliquée à cette roue. Si elle tombe dans un réservoir inférieur, elle aura fourni tout le travail dont elle est capable quand elle se sera entièrement écoulée. Le travail qu'elle aura alors fourni et qui mesure son énergie est égal à son poids multiplié par la distance verticale entre ses centres de gravité dans les réservoirs supérieur et inférieur.

Remarque. — On voit que, pour pouvoir produire du travail avec un réservoir d'eau, il faut deux niveaux ou une *chute*. Un volume d'eau, quelque grand qu'il fût, tout au même niveau, ne permettrait pas de produire du travail, c'est-à-dire que son énergie serait zéro. Cette eau, en effet, serait en équilibre stable.

e. Supposons un cylindre vertical muni d'un piston et rempli d'un gaz à une pression *supérieure à la pression atmosphérique :* admettons que le piston soit maintenu en repos par un arrêt fixe ayant strictement la force nécessaire pour cela. Si l'on rompt cet arrêt, ce qui n'exige qu'un effort infiniment petit, le piston se soulèvera et pourra soulever un poids ou vaincre toute autre résistance.

Son énergie est le travail accompli depuis l'instant initial jusqu'à la détente complète, la détente s'accomplissant dans un cylindre imperméable à la chaleur.

Remarque. — On ne peut utiliser une pression qu'à la condition d'avoir un milieu à une pression moindre, c'est-à-dire une *chute* de pression. Un gaz qui serait partout à la même pression, quelque grande que fût sa masse, aurait une énergie zéro.

f. Supposons que l'on possède une source de chaleur à une température *supérieure* à celle du milieu ambiant. Si on la met en communication avec un cylindre muni d'un piston et rempli d'air à la pression atmosphérique, la force expansive de l'air croîtra et pourra être utilisée.

Remarque. — Si l'on ne possédait qu'un seul milieu partout à la même température, on ne pourrait pas l'utiliser. Mais une *chute* de température est une source de travail et possède une énergie aussi bien qu'une chute de pression ou une chute d'eau.

Dans ces deux derniers cas, on voit qu'on possède directement l'un des deux éléments constitutifs du travail : la force, par le poids de l'eau ou la pression du gaz, c'est-à-dire que les énergies correspondantes sont des énergies potentielles.

La possession d'une source de chaleur doit être considérée comme fournissant aussi un des éléments du travail. On admet, en effet, aujourd'hui que les molécules de la matière pondérable, même quand elles paraissent en repos, sont douées de mouvement d'amplitude inappréciable, mais avec des vitesses d'autant plus grandes que leur température est plus élevée. Donc, communiquer de la chaleur à un corps, c'est accroître les vitesses de ces mouvements invisibles et que Clausius appelle *stationnaires*.

D'après cela, l'énergie calorifique doit être regardée comme cinétique.

g. Un courant électrique, étant envoyé dans une machine dynamo-électrique réceptrice, lui permet de produire du travail. Donc, un courant électrique possède de l'énergie ; un courant électrique étant régardé comme un mouvement, son énergie est regardée comme cinétique.

h. Une bouteille de Leyde (généralement un condensateur électrique chargé) permet de produire un courant. Il suffit de mettre les deux armatures en communication par un fil conducteur. Si, en un point de ce conducteur. on place une machine dynamo-électrique réceptrice, on produira du travail. Donc, un condensateur représente également de l'énergie. Cette énergie est considérée comme potentielle, étant due aux tensions des deux électricités contraires dont l'accumulation constitue le condensateur.

k. Un aimant naturel ou artificiel est le siège d'une force ; on peut l'utiliser pour déplacer des corps. C'est donc aussi une source de travail. Maxwell, par des raisons profondes qui ne sauraient trouver place ici, regarde cette énergie comme potentielle. Si l'on ne considère un aimant que comme constituant une force attirante, il est clair qu'on doit regarder l'énergie correspondante comme potentielle. Si, au contraire, on admet, avec Ampère, que l'aimantation est due à des courants fermés, de dimensions très petites, il semblerait qu'on dût en regarder l'énergie comme cinétique.

En général, il existe une certaine incertitude pour qualifier les énergies autres que celles d'origine mécanique et même pour certaines de celles-ci. Ainsi, selon la théorie cinétique des gaz, les molécules d'un gaz même en repos apparent sont douées de mouvements stationnaires très rapides, d'où résultent des chocs répétés des molécules entre elles et sur les parois. Ce qui nous apparaît comme une pression statique serait le résultat de ces chocs. D'après cela, l'énergie due à la pression d'un gaz ne serait pas, dans son essence première, potentielle, mais cinétique.

Cette incertitude plus ou moins grande où l'on est, relativement à la qualité de certaines énergies, semblerait devoir, dès l'abord, enlever à cette théorie tout intérêt.

Mais le principe de l'énergie nous montrera que l'on peut impunément se tromper sur les quantités d'énergie de chaque sorte qui interviennent dans un phénomène, pourvu qu'on ne se trompe pas sur leur total.

Objet de la théorie de l'énergie.

4. Les exemples qui précèdent montrent suffisamment que, partout où se manifeste l'énergie, il se produit l'un des deux phénomènes suivants ou les deux :

1° Transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle ou *vice versa;*

2° Communication ou transmission d'énergie d'un système matériel à un autre.

Ainsi, si l'on considère l'eau renfermée dans un réservoir et destinée à faire fonctionner une roue hydraulique, au début, tout est en repos et l'énergie de l'eau est entièrement potentielle. A un instant postérieur quelconque, le niveau de l'eau a baissé et son énergie potentielle a diminué; mais, en revanche, la roue et les résistances qui y sont appliquées ont acquis des vitesses et du travail a déjà été produit. Donc l'énergie potentielle disparue du réservoir a été, en partie, transmise à la roue qui l'a transformé en énergie cinétique et en partie utilisée. Ce fait de la possibilité de changer à son gré la qualité d'une énergie fait comprendre pourquoi, du moins au point de vue pratique, une erreur sur la qualification d'une énergie est sans importance. Ainsi, en admettant (n° 2) que l'énergie d'un gaz sous pression soit cinétique dans son essence première, il est certain que, pratiquement, elle se manifeste à nous par une pression seule mesurable et, par suite, sous forme d'énergie potentielle. Donc, si elle était cinétique d'abord, la seule présence des parois l'aurait transformée en énergie potentielle et, *pourvu que cette énergie soit égale à la première,* ce que nous verrons avoir lieu, il n'y a pas d'inconvénient à les prendre l'une pour l'autre.

L'objet de la théorie qui nous occupe est précisément l'étude des lois suivant lesquelles s'accomplit le double phénomène de la transformation de nature et de la transmission de l'énergie.

Principe de la conservation de l'énergie.

5. *Si un système matériel n'est en communication d'aucune sorte avec le monde extérieur, son énergie totale est invariable.*

En effet, un pareil système n'est soumis qu'à ses actions mutuelles. Soient V la fonction de ces forces et $\Sigma m v^2$ la force vive du système à l'instant quelconque t; soient V_0 et $\Sigma m v_0^2$ les valeurs de ces mêmes quantités à un autre instant quelconque t_0. Le théorème des forces vives appliqué à l'intervalle de temps $t - t_0$ donne

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = V - V_0.$$

Mais, si Π et Π_0 représentent l'énergie potentielle du système aux deux instants t et t_0, on a (n° 2)

$$V = C - \Pi,$$
$$V_0 = C - \Pi_0,$$

C étant une constante égale au maximum de V; d'où

$$V - V_0 = \Pi_0 - \Pi$$

et, par suite

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 + \Pi = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \Pi_0 = \text{const.}$$

Ainsi, supposons un pendule de poids P maintenu en repos par un fil, à une hauteur h au-dessus de son point le plus bas ou, pour être conforme à notre définition de l'énergie potentielle d'un système matériel, envisageons le système matériel formé par le pendule et la terre, en admettant :

1° Que ce système ne subit aucune action sensible du dehors;

2° Que la terre et, par suite, le point d'attache du fil soient fixes dans l'espace.

Lorsque le système passe de son état actuel à l'état d'équilibre stable, comme la terre reste fixe, le travail des actions mutuelles se réduit à celui du poids du pendule. Ainsi, au début, l'énergie totale du système, énergie potentielle, est (n° 2) Ph.

Si on rend le pendule libre et qu'il descende d'une hauteur z, l'énergie potentielle du système ne sera plus que

$$P(h-z),$$

et si v est la vitesse du pendule à cet instant, et, par suite, $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$ son énergie cinétique, l'énergie totale du système sera

$$P\left(h-z+\frac{v^2}{2g}\right)=Ph,$$

puisque

$$v^2=2gz.$$

Corollaire. — Si on considère le système matériel formé par l'univers, il n'est en communication avec aucun autre système. Donc, son énergie totale est immuable. Il est aussi impossible de créer ou de détruire de l'énergie, qu'il l'est de créer ou de détruire de la matière. Tout ce que nous pouvons faire, c'est de transformer de l'énergie cinétique en énergie potentielle, ou *vice versa*, ou d'en transmettre d'une partie de l'univers à une autre, mais sans modifier la quantité totale primitivement existante.

Application à un système matériel quelconque; le théorème des forces vives.

6. *Quelles que soient les conditions dans lesquelles un système matériel est placé vis-à-vis du reste de l'univers, l'accroissement de son énergie pendant un intervalle de temps quelconque se compose :*

1° *De l'énergie qu'il a reçue du dehors, c'est-à-dire qui lui a été communiquée sous forme de chaleur, d'électricité, etc., par l'ensemble des corps avec lesquels il peut échanger de l'énergie;*

2° *Du travail qu'il a reçu du dehors, c'est-à-dire du travail des forces extérieures qui le sollicitent.*

En effet, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, toute énergie gagnée par un système matériel quelconque (S) est nécessairement empruntée au système (S_1) formé par l'ensemble des autres corps de l'univers (pratiquement, on n'aura pas à considérer ceux qui n'exercent pas d'action sensible).

Or l'énergie fournie par ce dernier système comprend :

1° Celle fournie directement sous forme de chaleur, d'électricité, etc., par les corps extérieurs avec lesquels le système donné peut échanger des énergies;

2° Le travail des forces extérieures agissant sur le système donné, puisque ces forces sont exercées par tout ou partie des corps du système extérieur.

La proposition est donc établie.

Soient $\Delta\mathcal{E}$ l'accroissement de l'énergie totale du système donné pendant un intervalle de temps quelconque, $\Delta\eta$ la quantité d'énergie qui lui est fournie par l'ensemble des corps avec lesquels il peut échanger de l'énergie sous forme de chaleur, d'électricité, etc. Soient enfin F l'une des forces extérieures agissant sur le système donné et $\Sigma\mathfrak{T}F$ la somme de leurs travaux pendant un intervalle de temps quelconque. On aura

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\eta + \Sigma\mathfrak{T}F \quad (1). \tag{1}$$

Corollaire I. — On peut encore dire que :

1° *L'énergie fournie à un système matériel par les*

(1) Si l'on appelait $\mathcal{E}_1$ l'énergie du système extérieur, $\Delta\mathcal{E}_1$ son accroissement et F_1 l'une des réactions exercées par le système donné sur les corps extérieurs, on aurait, comme il est aisé de le voir,

$$\Delta\eta = -(\Delta\mathcal{E}_1 - \Sigma\mathfrak{T}F_1).$$

corps avec lesquels il peut échanger de l'énergie est égale à l'accroissement d'énergie du système diminuée *du travail des forces extérieures qui le sollicitent.*

2° *Si le système n'agit mécaniquement sur le dehors que par des corps solides en contact ou reliés par des liens rigides, l'énergie qui lui est fournie est égale à l'accroissement de son énergie* augmentée *du travail extérieur qu'il accomplit.*

De la dernière équation, on tire

$$\Delta\tau_i = \Delta\mathcal{E} - \Sigma\mathfrak{T}F \tag{2}$$

qui établit l'énoncé 1°.

Pour établir le second, observons que les forces extérieures F qui agissent sur un système matériel sont les actions que les corps extérieurs exercent sur le système. La somme de leurs travaux est donc le travail *reçu* ou *consommé* par le système. Au contraire, le travail des réactions que les corps du système exercent sur les corps extérieurs est le travail extérieur *produit* ou *accompli* par le système (ces travaux pouvant d'ailleurs l'un et l'autre être positifs ou négatifs).

Ainsi, si un piston d'un cylindre vertical soulève un corps grave qu'il porte, le travail qu'il accomplit est celui de la pression verticale ascendante qu'il exerce sur le corps grave, travail positif; celui qu'il reçoit ou consomme est celui négatif de la pression que le corps exerce sur lui. Ici, ces deux travaux sont égaux et de signes contraires. Cela arrive toutes les fois que le système matériel considéré n'agit au dehors qu'à l'aide de corps solides en contact ou reliés par des liens rigides.

Alors le travail accompli est égal à $-\Sigma\mathfrak{T}F$, ce qui établit l'énoncé 2°. Mais il est bon d'observer que l'énoncé 1° est seul général.

Corollaire. — Si le système matériel n'est pas en communication d'énergie calorifique ou électrique avec le dehors, en sorte que $\Delta\eta = 0$, l'équation devient

$$\Delta\mathcal{E} = \Sigma\mathfrak{T}F,$$

qui est l'expression du théorème des forces vives, tel qu'on le considère habituellement en Mécanique. Car

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 + \text{H} = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 + \text{C} - \text{V},$$

$$\Delta\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2) - (\text{V} - \text{V}_0).$$

Éléments qui définissent l'état d'un système matériel. Cycles.

7. Nous dirons que l'état d'un système matériel est défini à un certain instant, lorsqu'on se donne, à cet instant :

1° Les positions des diverses parties du système;

2° Leur état calorifique représenté par leurs températures;

3° Leur état électrique représenté par les tensions de l'électricité statique qui peut s'y trouver et par les grandeurs, directions et sens des courants électriques qui peuvent y passer;

4° Leur état magnétique représenté par les grandeurs, directions et sens des moments magnétiques qui peuvent s'y exercer.

Et nous dirons qu'un système matériel décrit un *cycle* lorsque, parti d'un certain état, il y revient en y acquérant la même force vive.

Application à un cycle.

8. Théorème. — 1° *Quelles que soient les conditions dans lesquelles un système matériel est placé vis-à-vis*

du reste de l'univers, la quantité totale d'énergie qu'il consomme pendant qu'il décrit un cycle est égale et de signe contraire au travail des forces extérieures qui le sollicitent;

2° *S'il n'agit au dehors que par des corps solides en contact ou reliés par des liens rigides, la quantité d'énergie qu'il consomme pendant un cycle est égale et de même signe que le travail extérieur qu'il accomplit.*

Pour démontrer cette importante proposition, il est bon de mettre l'énergie totale $\mathcal{E}$ du système matériel donné qui entre dans l'équation (2) sous forme plus explicite. Cette énergie est la somme des énergies cinétique et potentielle du système, soit

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 + \Pi$$

Mais dans l'énergie cinétique $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ il faut comprendre non seulement celle due aux vitesses *sensibles* des points du système, mais aussi celle due aux vitesses des mouvements insensibles ou stationnaires qui peuvent être dues à la chaleur, aux courants électriques, peut-être même au magnétisme ou à l'électricité statique. Soit w l'une des vitesses sensibles et $\Sigma \frac{1}{2} m w^2$ l'énergie cinétique correspondante; désignons en bloc par W tout le reste de l'expression de $\mathcal{E}$, en sorte que cette expression devient

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\Sigma m w^2 + \mathrm{W}, \tag{3}$$

W étant une quantité qui dépend non seulement des positions des points du système, mais, suivant les cas, de tout ou partie des autres grandeurs qui définissent son état (n° 7).

D'après cela, si un système décrit un cycle, son énergie $\mathcal{E}$ reprend la même valeur.

Donc, si on applique l'équation (2) à un cycle, d'où $\Delta \mathcal{E} = 0$, elle devient

$$\Delta \eta = - \Sigma \mathfrak{F} F,$$

qui établit la proposition 1° et, en se reportant au raisonnement du corollaire du n° 6, la proposition 2° s'ensuit.

Équivalent mécanique de la chaleur.

9. Supposons que l'électricité et le magnétisme n'interviennent pas et qu'on fasse décrire à un système matériel soumis à des forces extérieures et intérieures un cycle en lui communiquant simplement (ou lui soustrayant, suivant les besoins) de la chaleur. On peut mesurer le nombre de calories qu'on lui a fournies et aussi le travail des forces extérieures qu'on fait agir sur lui, et comparer les résultats. On reconnaît ainsi que, quelles que soient les conditions dans lesquelles on fait l'expérience, le rapport du travail produit à la chaleur fournie est une même constante (1). Cette constante se nomme l'*équivalent mécanique de la chaleur*. Elle est d'environ 424^{kg}, c'est-à-dire qu'une calorie a une énergie de 424^{kg}, ou peut produire, quelles que soient les conditions où on la place, un travail de 424^{kg}; ou inversement 1^{kg} de travail exige $\frac{1}{424}$ de calorie. Cette dernière fraction se nomme l'*équivalent calorifique du travail.*

On voit, d'après cela, que l'on peut exprimer à volonté le travail mécanique en calories ou la chaleur en kilogrammètres, puisqu'à un travail donné répond toujours une quantité de chaleur proportionnelle et *vice versa.*

---

(1) On peut aussi considérer ce fait comme résultant du principe même de la conservation de l'énergie, c'est-à-dire de l'impossibilité du mouvement perpétuel, d'après un raisonnement classique.

Supposons toujours qu'un système matériel se transforme sous les seules influences des forces extérieures et intérieures et de la chaleur. Soit ΔQ la quantité de chaleur qui lui est fournie pendant un intervalle de temps quelconque. L'énergie correspondante, en désignant par E l'équivalent mécanique de la chaleur, est $\Delta\eta = E\Delta Q$ et l'équation (2) devient

$$E\Delta Q = \Delta\mathcal{E} - \Sigma\mathfrak{G}F$$

ou

$$\Delta Q = \frac{1}{E}\Delta\mathcal{E} - \frac{1}{E}\sum\mathfrak{G}F. \tag{4}$$

Ainsi :

Si un système matériel se transforme sous les seules influences de la chaleur et des forces extérieures, la quantité de chaleur qui lui est fournie du dehors pendant un intervalle de temps quelconque est égale à l'accroissement correspondant de son énergie exprimée en calories, diminuée du travail des forces extérieures qui le sollicitent, exprimé également en calories.

Supposons que les mouvements du système soient assez lents pour qu'on puisse négliger la force vive sensible; alors son énergie $\mathcal{E}$ se réduit à la fonction W, qui ne dépend, dans ce cas, que des positions et températures des divers points du système, en sorte que

$$\Delta Q = \frac{1}{E}(\Delta W - \Sigma\mathfrak{G}F).$$

Supposons que le système matériel se réduise à un corps homogène de volume v dont tous les points soient, à chaque instant, à une même température T et que les forces extérieures se réduisent à une pression uniforme p exercée à sa surface, en sorte que

$$\Sigma \mathfrak{G} F = - \int p\, dv;$$

on aura

$$\Delta Q = \frac{1}{E}(\Delta W + \int p\, dv)$$

et, pour un intervalle de temps infiniment petit,

$$dQ = \frac{1}{E}(dW + p\, dv).$$

Ici, l'état du corps est, à chaque instant, défini par la connaissance des trois grandeurs p, v, T, entre lesquelles il existe d'ailleurs une relation qui, pour les gaz, résulte des lois de Mariotte et de Guy-Lussac combinées; pour d'autres corps, peut-être plus complexe, en sorte que W peut toujours être considéré comme une fonction de deux quelconques de ces trois grandeurs prises pour seules variables indépendantes.

L'énergie exprimée en calories $\frac{W}{E}$ est souvent désignée sous le nom de *chaleur interne*, de sorte que l'équation ci-dessus écrite

$$\Delta \frac{W}{E} = \Delta Q - \frac{1}{E}\int p\, dv$$

montre que, si l'on fournit une certaine quantité (positive ou négative) de chaleur ΔQ *à un corps, l'accroissement de chaleur interne qui en résulte est égal à la chaleur fournie* ΔQ, *diminuée du travail extérieur accompli par le corps, ce travail étant exprimé en calories.*