E. Sarrau

Sur un théorème de la théorie de l'attraction

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 469-485

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__469_0>

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DE L'ATTRACTION;

PAR M. E. SARRAU,
Membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique.

Lorsque l'on considère l'attraction exercée, suivant la loi de Newton, par une masse sur un point, on a ce théorème :

Si le point est à l'intérieur de la masse, la fonction potentielle de cette masse sur ce point satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} + \frac{d^2 u}{d\gamma^2} = -4\pi K,$$

en désignant par u la fonction potentielle, par α, β, γ les coordonnées du point, et par K *la densité de la masse en ce point.*

Poisson a établi, le premier, ce théorème en considérant d'abord l'attraction d'une sphère homogène (¹). D'autres géomètres, notamment Gauss (²) et M. Clausius (³), en ont donné des démonstrations directes, en ayant égard à la variation de la densité de la masse attirante (⁴). Ces démonstrations paraissent compliquées, parce qu'elles comprennent des propositions de Calcul intégral intéressantes en elles-mêmes, et d'ailleurs in-

(¹) *Bulletin de la Société philomathique*, t. III, p. 368.

(²) *Œuvres*, t. V, p. 197, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 273.

(³) *De la fonction potentielle et du potentiel*, traduit de l'allemand par F. Folie. Paris, Gauthier-Villars; 1870, p. 44.

(⁴) On peut consulter, sur le même sujet, la *Théorie du potentiel*, par M. Émile Mathieu. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

dépendantes du sujet. Il y a avantage à isoler ces propositions, et la démonstration du théorème de Poisson découle ainsi très simplement de quelques théorèmes généraux qui sont susceptibles d'un grand nombre d'autres applications.

I. — Théorèmes préliminaires.

1. Théorème principal. — *Soit* $F(x, y, z)$ *une fonction des coordonnées* (x, y, z), *finie, continue et bien déterminée dans toute l'étendue d'un volume* v *limité par une surface* σ; *en désignant par*

dv un élément du volume v;
$d\sigma$ un élément de la surface σ;
a le cosinus de l'angle que la normale à l'élément $d\sigma$, extérieure au volume v, fait avec l'axe OX;

on a

$$\int \frac{dF}{dx}\,dv = \int aF\,d\sigma, \tag{1}$$

l'intégrale du premier membre s'étendant à tous les éléments du volume v, et l'intégrale du second membre s'étendant à tous les éléments de la surface σ.

En effet, à un système de valeurs (y, z) correspondent, sur la surface σ, certaines valeurs de x; le nombre de ces valeurs est toujours pair, puisqu'une parallèle à l'axe des x, entrant dans le volume v un certain nombre de fois, en sort le même nombre de fois.

Supposons qu'un point décrivant cette parallèle, de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, entre dans le volume v pour $x = x_1$ et en sorte pour $x = x_2$, y entre pour $x = x_3$ et en sorte pour $x = x_4$, et ainsi de suite. Soient $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$ les valeurs de F pour ces valeurs particulières de x.

En prenant pour l'élément dv le parallélépipède $dx\,dy\,dz$, on a

$$\int \frac{dF}{dx}\,dv = \int\int\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz,$$

et, en intégrant par rapport à la variable x,

$$\begin{aligned}\int\int\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz \\ = \int\int [(F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \ldots]\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Or, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4, ... les valeurs de a aux points dont les abscisses sont x_1, x_2, x_3, x_4, ..., et par $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, ... les éléments superficiels en ces points, qui ont pour projection $dy\,dz$ sur le plan YOZ, on a évidemment

$$-a_1\,d\sigma_1 = a_2\,d\sigma_2 = -a_3\,d\sigma_3 = a_4\,d\sigma_4 = \ldots = dy\,dz.$$

On peut, par suite, écrire

$$\begin{aligned}\int\int\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz \\ = \int [a_2 F_2\,d\sigma_2 + a_1 F_1\,d\sigma_1 + a_4 F_4\,d\sigma_4 + \ldots],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé,

$$\int\int\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int a F\,d\sigma.$$

2. Corollaire I. — Si, dans la relation (1), on suppose $F = 1$, on trouve

$$\int a\,d\sigma = 0. \tag{2}$$

Donc, *l'intégrale* $\int a\,d\sigma$ *étendue à toute la surface d'un espace limité est égale à zéro.*

3. Corollaire II. — En supposant $F = x$, il vient

$$\int dv = \int ax\, d\sigma. \tag{3}$$

Donc, *l'intégrale* $\int ax\, d\sigma$ *étendue à la surface d'un espace limité est égale au volume de cet espace.*

4. Corollaire III. — Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$, extérieure au volume v, et F, G, H des fonctions de x, y, z finies, continues et bien déterminées dans l'étendue du volume v; on a les trois équations

$$\int \frac{dF}{dx}\, dv = \int a F\, d\sigma,$$

$$\int \frac{dG}{dy}\, dv = \int b G\, d\sigma,$$

$$\int \frac{dH}{dz}\, dv = \int c H\, d\sigma,$$

et, par suite, en ajoutant membre à membre ([1]),

$$\int \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) dv = \int (aF + bG + cH)\, d\sigma. \tag{4}$$

5. *Formule de Green.* — Si l'on fait dans l'équation (4)

$$F = \rho \frac{d\varphi}{dx}, \qquad G = \rho \frac{d\varphi}{dy}, \qquad H = \rho \frac{d\varphi}{dz},$$

([1]) Cette formule est fréquemment utilisée en Physique mathématique; Laplace s'en est servi, le premier, dans la *Théorie de la capillarité*.

ρ et φ étant des fonctions de (x, y, z), il vient

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int \rho \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dv \\
&\qquad + \int \left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\right) dv \\
&\quad = \int \rho \left(a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz}\right) d\sigma.
\end{aligned}
\right.
$$

L'expression

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

a été appelée par Lamé *paramètre différentiel du second ordre de la fonction* φ; nous la désignerons par $\Delta\varphi$, en posant symboliquement

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Quant au trinôme qui figure dans l'intégrale du second membre, on peut lui assigner une signification très simple. En effet, on a, en général,

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz.$$

Supposons qu'à partir du point (x, y, z) de la surface v, et sur la normale extérieure au volume v, on porte une longueur infiniment petite dn; les projections de cette longueur sur les axes sont

$$dx = a\,dn, \qquad dy = b\,dn, \qquad dz = c\,dn,$$

et la valeur correspondante de $d\varphi$ est

$$d\varphi = \left(a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz}\right) dn,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dn},$$

$\frac{d\varphi}{dn}$ désignant la dérivée de la fonction φ suivant la normale à la surface σ.

En résumé, si l'on pose

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},\\ \lambda &= \frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz},\\ \frac{d\varphi}{dn} &= a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz}.\end{aligned}\right.$$

l'équation (5) devient

$$(7)\qquad \int \rho\,\Delta\varphi\,dv + \int \lambda\,dv = \int \rho\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma.$$

Telle est la formule de Green (¹); elle exige que les quantités $\rho\frac{d\varphi}{dx}$, $\rho\frac{d\varphi}{dy}$, $\rho\frac{d\varphi}{dz}$ soient finies, continues et bien déterminées dans le volume v.

6. *Modification des formules dans le cas où le volume v renferme des infinis.* — Supposons que la fonction F de la formule fondamentale ait une valeur infinie en un point P(α, β, γ), dans l'intérieur du volume v.

Concevons une sphère σ' de rayon infiniment petit r', décrite du point P comme centre. On peut appliquer la formule (1) au volume compris entre les surfaces σ et σ',

(¹) *Essai d'application de l'Analyse mathematique à la théorie de l'Electricite et du Magnetisme* (Nottingham, 1828), réimprimé dans le *Journal de Crelle* (1850), et dans l'édition des *Œuvres* de Green. En fait, suivant la remarque de M. Émile Mathieu, la formule dite *de Green* a éte employée dans différents cas par Fourier et Poisson, avant la publication du Mémoire de Green *Sur l'Électricite.* Duhamel et Lamé s'en sont servis, postérieurement, dans des *Recherches sur la distribution de la temperature dans les corps solides* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXII^e Cahier; 1833, p. 69 et 204).

en étendant à ces deux surfaces l'intégration du second membre. Si donc on désigne par ω la valeur de l'intégrale $\int a\mathrm{F}\,d\sigma'$, relative à la sphère infiniment petite, c'est-à-dire la limite de cette intégrale lorsque r' décroît indéfiniment, la formule (1) est remplacée par la suivante :

$$\int \frac{d\mathrm{F}}{dx}\,dv = \int a\mathrm{F}\,d\sigma + \omega, \tag{8}$$

et l'on aurait une somme de termes ω, si la fonction F admettait plusieurs infinis dans le volume v.

La formule (6) éprouve une modification analogue, lorsque l'une des fonctions φ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ devient infinie.

7. *Premier exemple.* — Désignant par r la distance du point variable (x, y, z) à un point fixe $\mathrm{P}(\alpha, \beta, \gamma)$, de sorte que

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2, \tag{9}$$

et posant

$$\varphi = \frac{1}{r}, \tag{10}$$

faisons $\mathrm{F} = \rho\varphi$ dans la formule (1), ρ étant une fonction finie dans le volume v.

Si le point P est hors du volume v, la formule (1) est immédiatement applicable; mais, si ce point est dans ce volume, la formule peut se trouver modifiée, la fonction devenant infinie lorsque l'on attribue à x, y, z les valeurs α, β, γ.

Considérons l'intégrale

$$\omega = \int a\rho\varphi\,d\sigma',$$

relative à la sphère σ', de rayon infiniment petit r'.

Soit K la valeur de ρ au point P; on peut, dans l'intégration, remplacer ρ par K, et l'on a, sur la sphère,

$$\varphi = \frac{1}{r'}.$$

Par suite,

$$\omega = \frac{K}{r'}\int a\,d\sigma',$$

et cette valeur se réduit à zéro (n° 2).

La formule (1) s'applique donc, quelle que soit la position du point P, de sorte que, lorsque la fonction φ est définie par les formules (9) et (10), on a, dans tous les cas,

$$\int \rho\frac{d\varphi}{dx}\,dv - \int \varphi\frac{d\rho}{dx}\,dv = \int a\rho\varphi\,d\sigma. \tag{11}$$

8. *Second exemple.* — Faisons maintenant $\varphi = \frac{1}{r}$ dans la formule (7). On a alors

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{x-\alpha}{r^3}, & \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5},\\ \frac{d\varphi}{dy} &= -\frac{y-\beta}{r^3}, & \frac{d^2\varphi}{dy^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\beta)^2}{r^5},\\ \frac{d\varphi}{dz} &= -\frac{z-\gamma}{r^3}, & \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5}.\end{aligned}\right.$$

Les dérivées secondes satisfont à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0, \tag{13}$$

et les dérivées premières donnent, en ayant égard à la troisième des formules (6),

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{1}{r^2}\left(a\frac{x-\alpha}{r} + b\frac{y-\beta}{r} + c\frac{z-\gamma}{r}\right),$$

ou bien, en désignant par ε l'angle que la normale en un point M de la surface σ, extérieure au volume v, fait avec le vecteur qui joint le point P au point M,

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\cos\varepsilon}{r^2}. \tag{14}$$

Cela posé et admettant que la fonction ρ reste finie dans le volume v, deux cas se présentent :

1° P *est extérieur à* v, r ne devient pas nul; les dérivées de φ restent finies dans le volume de v, et la formule (7) devient, en y remplaçant, d'après la relation (13), $\Delta\varphi$ par zéro,

$$\int \lambda \, dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma. \tag{15}$$

2° P *est intérieur à* v; on doit alors ajouter au second membre de l'équation (7) l'intégrale

$$\omega = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma',$$

étendue à la surface d'une sphère décrite, du point P comme centre, avec un rayon infiniment petit r'.

On a, sur cette sphère,

$$\varepsilon = \pi, \qquad \cos\varepsilon = -1, \qquad r = r',$$

et, par suite, d'après la valeur (14),

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{r'^2}.$$

On peut d'ailleurs, dans l'intégration, remplacer ρ par la valeur K de cette fonction au point P; il en résulte

$$\omega = \frac{K}{r'^2}\int d\sigma';$$

mais l'intégrale $\int d\sigma'$ représente la surface totale de la sphère σ', et cette surface est égale à $4\pi r'^2$: donc.

$$\omega = 4\pi K,$$

de sorte que l'équation (15) est remplacée par la suivante :

$$(16) \qquad \int \lambda\, dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma - 4\pi K.$$

9. En particulier, soit $\rho = 1$: la deuxième formule (6) donne $\lambda = 0$, et en remplaçant $\frac{d\varphi}{dn}$ par sa valeur (14) dans les équations (15) et (16), on a ce théorème :

L'intégrale

$$\int \frac{\cos \varepsilon}{r^2} d\sigma,$$

étendue à toute la surface d'un espace limité, est nulle, ou égale à 4π, suivant que l'origine P *du vecteur r est extérieure ou intérieure à cet espace.*

II. — Théorème de Poisson.

10. *Composantes de l'attraction.* — Imaginons un espace limité rempli d'une matière continue et attirant un point matériel P. Soit M un point quelconque de cet espace; désignons par

α, β, γ les coordonnées du point P;
x, y, z les coordonnées du point M;
ρ la densité au point M;
dv un élément de volume renfermant le point M :
m la masse du point P;
r la distance du point P au point M.

La masse de l'élément dv est $\rho\, dv$, et la force attractive agissant sur le point P est, d'après la loi de Newton,

$$f\frac{m\rho\,dv}{r^2},$$

f désignant une constante. Les composantes de cette force sont

$$f\frac{m\rho(x-\alpha)\,dv}{r^3},\quad f\frac{m\rho(y-\beta)\,dv}{r^3},\quad f\frac{m\rho(z-\gamma)\,dv}{r^2}.$$

et l'on a, par suite, pour les composantes de l'attraction totale exercée sur le point P,

$$fm\int\frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv,$$

$$fm\int\frac{\rho(y-\beta)}{r^3}\,dv,$$

$$fm\int\frac{\rho(z-\gamma)}{r^3}\,dv,$$

les intégrations s'étendant à tous les éléments dv du volume attirant. Dans ces sommations, la densité ρ est constante, ou fonction de (x, y, z) suivant que la masse comprise dans ce volume est ou n'est pas homogène.

Les expressions de ces composantes s'écrivent

$$fm\mathrm{X},\quad fm\mathrm{Y},\quad fm\mathrm{Z},$$

en posant

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \int\frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv,\\ \mathrm{Y} &= \int\frac{\rho(y-\beta)}{r^3}\,dv,\\ \mathrm{Z} &= \int\frac{\rho(z-\gamma)}{r^3}\,dv. \end{aligned}\right.$$

11. *Fonction potentielle*. — Green a donné le nom de *fonction potentielle* à l'intégrale

$$(18)\qquad u=\int\frac{\rho}{r}\,dv.$$

étendue, comme les précédentes, au volume entier de la masse attirante.

Le calcul des trois intégrales (17) se réduit, comme on le verra plus loin, à celui de la fonction potentielle.

12. Les composantes X, Y, Z et la fonction potentielle u, variant avec la position du point P, sont des fonctions de (α, β, γ). Les valeurs de ces fonctions sont toujours finies et déterminées; car, si l'on exprime l'élément de volume dv en coordonnées polaires (r, θ, ψ) ayant pour origine le point P, on a

$$dv = r^3 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

et, par suite,

$$X = \int\int\int \rho \frac{x - \alpha}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

$$Y = \int\int\int \rho \frac{y - \beta}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

$$Z = \int\int\int \rho \frac{z - \gamma}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

$$u = \int\int\int \rho \, r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

Les quantités $\frac{x-\alpha}{r}$, $\frac{y-\beta}{r}$, $\frac{z-\gamma}{r}$, étant les cosinus directeurs du vecteur PM, ont une valeur numérique moindre que 1. Donc, les intégrales dont il s'agit n'ont pas d'éléments infinis, et la valeur de chacune d'elles reste finie et déterminée.

13. *Dérivées premières de la fonction potentielle.* — Prenons la dérivée de u par rapport à α; en différentiant sous le signe $\int$, on a

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \rho \frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha} dv = -\int \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{d\alpha} dv:$$

d'ailleurs, de la relation

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

on tire

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{x-\alpha}{r}.$$

Il en résulte

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv = \mathrm{X},$$

de sorte que l'on a

$$(19) \qquad \frac{du}{d\alpha} = \mathrm{X}, \qquad \frac{du}{d\beta} = \mathrm{Y}, \qquad \frac{du}{d\gamma} = \mathrm{Z},$$

ce qui établit que X, Y, Z *sont les dérivées partielles de la fonction potentielle.*

14. *Dérivées secondes de la fonction potentielle.* — Des relations (19) on tire, en différentiant sous le signe $\int$ les intégrales (17),

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \int \rho \left[\frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dv,$$
$$\frac{d^2 u}{d\beta^2} = \int \rho \left[\frac{3(y-\beta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dv,$$
$$\frac{d^2 u}{d\gamma^2} = \int \rho \left[\frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dv.$$

Si le point P est extérieur à v, les éléments de ces intégrales ne deviennent pas infinis, et elles ont par conséquent des valeurs finies et déterminées. En les ajoutant, on a l'équation de Laplace [1]

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} + \frac{d^2 u}{d\gamma^2} = 0.$$

---

[1] *Théorie de la figure des corps célestes* (*Mecanique céleste*, Liv. II, § 11).

15. Si le point P est intérieur à v, on voit que, malgré la transformation en coordonnées polaires, la fonction à intégrer pour calculer l'une des dérivées secondes devient encore infinie, parce que r reste au dénominateur. Sans entrer dans des détails sur la nature de ces intégrales, qui ont des éléments infinis, nous abandonnerons ces expressions comme impropres à la détermination des dérivées secondes, et nous opérerons cette détermination d'une autre manière.

16. Remarquons d'abord que, la valeur de r étant déterminée par la relation

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

si l'on pose, comme précédemment,

$$\varphi = \frac{1}{r},$$

les dérivées de φ par rapport à (α, β, γ) sont respectivement égales aux dérivées de la même fonction par rapport à (x, y, z) prises avec le signe contraire

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \frac{d\varphi}{d\beta} = -\frac{d\varphi}{dy}, \qquad \frac{d\varphi}{d\gamma} = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Cela posé, la fonction potentielle étant mise sous la forme

$$u = \int \rho\varphi\, dv,$$

on a, en prenant sa dérivée par rapport à α,

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \rho \frac{d\varphi}{d\alpha} dv = -\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv;$$

mais, d'après la formule (11) du n° 7, on a, quelle que soit la position du point P,

$$\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv + \int \varphi \frac{d\rho}{dx} dv = \int a\rho\varphi\, d\sigma.$$

On peut donc écrire

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \varphi \frac{d\rho}{dx}\, dv - \int a\rho\varphi\, d\sigma.$$

En prenant encore une fois la dérivée par rapport à α, il vient

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \int \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\rho}{dx}\, dv - \int a\rho \frac{d\varphi}{d\alpha}\, d\sigma.$$

Enfin, en remplaçant $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ par $-\frac{d\varphi}{dx}$, on obtient la première des expressions suivantes, les deux autres s'en déduisant par de simples permutations de lettres,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} &= -\int \frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\, dv + \int a\rho \frac{d\varphi}{dx}\, d\sigma,\\ \frac{d^2 u}{d\beta^2} &= -\int \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy}\, dv + \int b\rho \frac{d\varphi}{dy}\, d\sigma,\\ \frac{d^2 u}{d\gamma^2} &= -\int \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\, dv + \int c\rho \frac{d\varphi}{dz}\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant et en posant, comme précédemment (n° 5),

$$\lambda = \frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz},$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz},$$

il vient

$$(20)\quad \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} + \frac{d^2 u}{d\gamma^2} = -\int \lambda\, dv + \int \rho \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma.$$

Cela posé, si le point P est extérieur au volume v, il résulte de l'équation (15) du n° 8 que le second membre de l'équation (20) se réduit à zéro, et l'on retrouve ainsi l'équation de Laplace.

Si le point P est intérieur au volume v, il résulte de l'équation (16) du n° 8 que le second membre de l'équation (20) est égal à $-4\pi K$, K désignant la valeur de ρ

au point P, dont les coordonnées sont (α, β, γ). Donc, lorsque ce point est dans le volume v, la fonction potentielle satisfait à l'équation de Poisson

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} + \frac{d^2 u}{d\gamma^2} = -4\pi K. \tag{21}$$

17. Corollaire. — Nous donnerons enfin la démonstration d'un théorème établi par Gauss et par Chasles dans leurs recherches sur l'attraction des corps ([1]). Ce théorème, souvent utilisé dans la théorie de l'électricité, s'énonce comme il suit :

Si u est la fonction potentielle de masses, les unes intérieures, les autres extérieures à une surface fermée σ, on a

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M,$$

l'intégrale s'étendant à toute la surface σ, et M *étant la somme des masses qui sont intérieures à cette surface.*

En effet, si dans la formule (7) du n° 5, où ρ et φ sont des fonctions quelconques, on remplace ρ par 1 et φ par u, il vient

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = \int \Delta u \, dv.$$

Or, d'après l'équation de Poisson, on a, pour un point

([1]) Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. VIII, p. 209, et *Additions à la Connaissance des Temps pour l'année* 1845.

Gauss, Mémoire déjà cité (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 204, et suivantes).

Sturm, *Note sur un Mémoire de M. Chasles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. III, p. 345).

quelconque, en désignant par K la densité en ce point,

$$\Delta u = -4\pi K.$$

Il en résulte, conformément à l'énoncé,

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi \int K\, dv = -4\pi M;$$

et l'on doit se rappeler que, dans cette formule, la dérivée $\frac{du}{dn}$ est prise, en un point de la surface σ, suivant la normale en ce point extérieure au volume limité par la surface.