E. GOURSAT

Sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 437-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__437_1>

SUR LE MAXIMUM D'UN PRODUIT DE PLUSIEURS FACTEURS POSITIFS DONT LA SOMME EST CONSTANTE;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans un des derniers numéros du *Bulletin des Sciences mathématiques,* M. Darboux a publié une démonstration fort élégante, et à l'abri de toute objection, du théorème classique sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante. La démonstration suivante qui se rapproche davantage de la démonstration habituelle, est également rigoureuse.

Rappelons d'abord la formule

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

d'où l'on déduit que le produit de deux facteurs positifs, dont la somme est constante, augmente lorsque leur différence diminue.

Cela posé, considérons p facteurs positifs a, b, c, ..., l dont la somme est supposée constante et égale à S, et désignons par m la moyenne arithmétique de ces p facteurs, de telle sorte que l'on ait

$$S = mp.$$

Il s'agit de montrer que le produit

$$P = abc \ldots l \tag{1}$$

est inférieur à m^p, à moins que tous les facteurs a, b, ..., l ne soient égaux à m. En effet, si tous ces facteurs ne sont pas égaux, il y aura au moins un facteur inférieur à m et au moins un facteur supérieur à m. Soit $m - h$ un facteur inférieur à m, et $m + k$ un facteur supérieur à m. Sans toucher aux autres facteurs du produit P, remplaçons $m - h$ par m et $m + k$ par $m + k - h$; nous obtenons un nouveau produit

$$P' = a'b'c' \ldots l' \tag{2}$$

jouissant des propriétés suivantes : 1° la somme des facteurs de ce produit est encore égale à S; 2° le produit P' est supérieur au produit P; en effet, on a remplacé deux facteurs dont la différence était $h + k$ par deux facteurs ayant même somme que les premiers et dont la différence est inférieure à $h + k$; 3° le nombre des facteurs de P' différents de m est inférieur au moins d'une unité au nombre des facteurs de P différents de m.

En opérant sur le produit P' comme on a opéré sur le produit P, et ainsi de suite, autant de fois qu'il sera nécessaire, on finira par arriver à un produit composé de p facteurs égaux à m. Comme, dans cette suite d'opérations, chaque produit est plus grand que le précédent, il en résulte que le produit P d'où l'on est parti est inférieur à m^p. C. Q. F. D.