GENTY

Sur un complexe du second ordre et sur la question posée au concours de 1881 pour l'agrégation des sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 401-415

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__401_0>

SUR UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE ET SUR LA QUESTION POSÉE AU CONCOURS DE 1881 POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. GENTY.

On donne un ellipsoïde, et l'on considère les droites D *telles que, si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact* M *et* M′ *soient situées dans un même plan.*

1° *Démontrer que la droite* D *et la corde* MM′ *sont rectangulaires.*

2° *Trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* A.

3° *Ce lieu est un cône du second degré : trouver le lieu des positions du point* A *pour lesquelles ce cône est de révolution.*

4° *Trouver l'enveloppe* C *des droites* D *qui sont contenues dans un plan donné* P *et la surface* S *engendrée par la courbe* C, *quand le plan* P *se déplace parallèlement à un plan donné* Q.

5° *Trouver pour quelles directions du plan* Q *la surface* S *est de révolution.*

I.

1. Si les normales aux points M et M′ de l'ellipsoïde se rencontrent, il est évident que leur plan est normal à la droite D, intersection des plans tangents en M et M′; la droite D et sa polaire MM′ par rapport à l'ellipsoïde sont donc rectangulaires.

Réciproquement, si une corde MM′ de l'ellipsoïde et sa polaire D sont rectangulaires, les normales aux points M, M′ sont dans un même plan; c'est le plan mené par la droite MM′ perpendiculairement à la droite D.

Les droites D sont donc les droites de l'espace qui sont normales à leurs polaires par rapport à l'ellipsoïde, et leur ensemble constitue le complexe tétraédral particulier à l'étude duquel le Dr Th. Reye a consacré la vingt et unième leçon de sa *Géométrie de position*.

Avant de donner une théorie analytique de ce complexe, nous devons rappeler quelques notions fondamentales sur les *coordonnées d'une droite*.

2. Les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires étant ramenées à la forme

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

on peut prendre pour coordonnées de la droite les six quantités

$$l,\ m,\ n,$$

$$\lambda=ny_1-mz_1,\qquad \mu=lz_1-nx_1,\qquad \nu=mx_1-ly_1,$$

entre lesquelles on a la relation identique

$$l\lambda+m\mu+n\nu=0;$$

l, m, n sont proportionnels aux cosinus des angles que fait la droite avec les axes; λ, μ, ν sont de même proportionnels aux angles que fait avec les axes le plan mené par la droite et l'origine, et, si d est la distance de l'origine à la droite, on a

$$d^2=\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

Pour $l=m=n=0$, on a une droite située tout entière à l'infini; λ, μ et ν déterminent la direction de la normale aux plans parallèles qui contiennent cette droite.

Pour $\lambda = \mu = \nu = 0$, on a la droite passant par l'origine et faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à l, m et n respectivement.

Pour $\mu = \nu = 0$, λ étant différent de o (ce qui entraîne $l = 0$), on a une droite située dans le plan des zx.

Pour $m = n = 0$, l étant différent de zéro (ce qui entraîne $\lambda = 0$), on a une droite parallèle à l'axe des x.

Cela posé, voici quelques formules fort utiles et dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

3. Les coordonnées de la droite

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2},$$

qui joint les deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), sont

$$l = x_1 - x_2, \qquad m = y_1 - y_2, \qquad n = z_1 - z_2,$$
$$\lambda = y_2 z_1 - y_1 z_2, \qquad \mu = z_2 x_1 - z_1 x_2, \qquad \nu = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

4. Les coordonnées du point d'intersection de la droite $(l, m, n; \lambda, \mu, \nu)$ et du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

ont pour expression

$$x = \frac{\beta\nu - \gamma\mu - \delta l}{\alpha l + \beta\mu + \gamma n},$$
$$y = \frac{\gamma\lambda - \alpha\nu - \delta m}{\alpha l + \beta m + \gamma n},$$
$$z = \frac{\alpha\mu - \beta\lambda - \delta n}{\alpha l + \beta m + \gamma n}.$$

La droite est parallèle au plan si l'on a

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0:$$

elle est située tout entière dans le plan, si l'on a en même temps

$$\begin{aligned}\beta\nu - \gamma\mu - \delta l &= 0,\\ \gamma\lambda - \alpha\nu - \delta m &= 0,\\ \alpha\mu - \beta\lambda - \delta n &= 0.\end{aligned}$$

Les quatre équations qui précèdent ne représentent d'ailleurs que deux conditions distinctes; on obtient en effet la première en additionnant les trois autres multipliées par α, β, γ respectivement, et l'on obtient la quatrième en additionnant la deuxième et la troisième après les avoir multipliées respectivement par λ et μ.

5. Le résultat qui précède conduit immédiatement *aux équations ordinaires d'une droite donnée par ses coordonnées $l, m, n; \lambda, \mu, \nu$.*

Ces équations sont les suivantes :

$$\frac{x - \dfrac{\beta\nu - \gamma\mu - \delta l}{\alpha l + \beta m + \gamma n}}{l} = \frac{y - \dfrac{\gamma\lambda - \alpha\nu - \delta m}{\alpha l + \beta m + \gamma n}}{m} = \frac{z - \dfrac{\alpha\mu - \beta\lambda - \delta n}{\alpha l + \beta m + \gamma n}}{n},$$

α, β, γ, δ ayant des valeurs absolument quelconques, pourvu qu'on n'ait pas en même temps $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

6. Les coordonnées de la droite, intersection des deux plans

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0,\\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' &= 0,\end{aligned}$$

ont pour expression

$$\begin{aligned}l &= \beta\gamma' - \gamma\beta', & m &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma', & n &= \alpha\beta' - \beta\alpha',\\ \lambda &= \delta\alpha' - \alpha\delta', & \mu &= \delta\beta' - \beta\delta', & \nu &= \delta\gamma' - \gamma\delta'.\end{aligned}$$

7. La distance d d'un point (x_2, y_2, z_2) à une droite

$(l, m, n;\ \lambda, \mu, \nu)$ est donnée par la formule

$$d^2 = \frac{(\lambda - ny_2 + mz_2)^2 + (\mu - lz_2 + nx_2)^2 + (\nu - mx_2 + ly_2)^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Les conditions pour que le point appartienne à la droite sont donc

$$\lambda = ny_2 - mz_2, \qquad \mu = lz_2 - nx_2, \qquad \nu = mx_2 - ly_2,$$

qui se réduisent à deux distinctes et qui résulteraient aussi des formules du n° 3.

8. Les coordonnées de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite $(l, m, n;\ \lambda, \mu, \nu)$ sont

$$\mu n - m\nu, \quad \nu l - n\lambda, \quad \lambda m - l\mu, \quad 0, \quad 0, \quad 0.$$

Le plan mené par la droite $(l_1, m_1, n_1;\ \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, parallèlement à la droite $(l_2, m_2, n_2;\ \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, a pour équation

$$(x, m_1, n_2) = P_{21}, \tag{1}$$

en posant

$$(x, m_1, n_2) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

et

$$P_{rs} = l_r\lambda_s + m_r\mu_s + n_r\nu_s.$$

La plus courte distance des deux droites est la distance au plan (1) du point (x_2, y_2, z_2) de la seconde : on a donc

$$d = \frac{l_2\lambda_1 + m_2\mu_1 + n_2\nu_1 - (x_2, m_1, n_2)}{\sqrt{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}}.$$

En vertu des formules du n° 6, le numérateur peut d'ailleurs s'écrire

$$P_{21} + P_{12}.$$

La condition qui exprime que les deux droites se rencontrent est donc

$$P_{21} + P_{12} = 0,$$

et, si cette condition est vérifiée, on reconnaît sans peine que le plan des deux droites a pour équation

$$(x, m_1, n_2) = P_{21} = - P_{12};$$

que leur point de rencontre a pour coordonnées

$$\frac{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1}{P_{21}}, \quad \frac{\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1}{P_{21}}, \quad \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{P_{21}};$$

enfin, que les coordonnées d'une droite quelconque passant par leur point d'intersection et situées dans leur plan sont

$$l + kl_1, \quad m + km_1, \quad n + kn_1, \quad \lambda + k\lambda_1, \quad \mu + k\mu_1, \quad \nu + k\nu_1.$$

9. Les conditions pour que trois droites

$$(l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1), \quad (l_2, m_2, \ldots), \quad (l_3, m_3, \ldots)$$

se rencontrent deux à deux sont, d'après ce qui précède,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} P_{23} + P_{32} &= 0, \\ P_{31} + P_{13} &= 0, \\ P_{12} + P_{21} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Or le produit $(l_1, m_1, n_1) \times (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est, d'après la règle de multiplication des déterminants, égal à

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & 0 & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

il est donc nul en vertu des équations (1). Donc ces équations entraînent l'une ou l'autre des conditions

$$(2) \qquad (l_1, m_2, n_3) = 0,$$

$$(3) \qquad (\lambda_1, \mu_2, \nu_3) = 0.$$

Si l'équation (2) est satisfaite sans que l'équation (3) le soit, les trois droites sont dans un même plan normal à la directrice qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$P_{23}\lambda_1 + P_{31}\lambda_2 + P_{12}\lambda_3;$$
$$P_{23}\mu_1 + P_{31}\mu_2 + P_{12}\mu_3;$$
$$P_{23}\nu_1 + P_{31}\nu_2 + P_{12}\nu_3.$$

Si, au contraire, la condition (3) est satisfaite, sans que la condition (2) le soit, les trois droites forment un trièdre dont le sommet a pour coordonnées

$$\frac{P_{32}l_1 + P_{13}l_2 + P_{21}l_3}{(l_1, m_2, n_3)};$$
$$\frac{P_{32}m_1 + P_{13}m_2 + P_{21}m_3}{(l_1, m_2, n_3)};$$
$$\frac{P_{32}n_1 + P_{13}n_2 + P_{21}n_3}{(l_1, m_2, n_3)}.$$

Si enfin les conditions (2) et (3) sont satisfaites en même temps, les trois droites sont situées dans un même plan et passent par un même point, ce plan et ce point étant déterminés comme au n° 8.

10. Nous signalerons enfin, sans les démontrer, deux formules élégantes :

Trois droites $(l_1, \ldots)$, $(l_2, \ldots)$, $(l_3, \ldots)$ qui ne sont pas situées dans un même plan déterminent un parallélépipède qu'on obtient en menant par chacune de ces droites des plans parallèles aux deux autres.

Le volume de ce parallélépipède a pour expression

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{(P_{23}+P_{32})(P_{31}+P_{13})(P_{12}+P_{21})}{(l_1, m_2, n_3)^2}.$$

Le centre de parallélépipède, c'est-à-dire le centre de l'hyperboloïde déterminé par ces trois droites a pour coordonnées

$$\frac{(P_{32}-P_{23})l_1+(P_{13}-P_{31})l_2+(P_{21}-P_{12})l_3}{2(l_1, m_2, n_3)}, \quad \ldots$$

II.

11. Une équation homogène de degré n par rapport aux coordonnées de la droite

$$(1) \qquad F(l, m, n; \lambda, \mu, \nu) = 0$$

représente un *complexe* d'ordre n.

On obtient l'équation du cône du complexe, c'est-à-dire le lieu des droites du complexe qui passent par un point donné (x_1, y_1, z_1), en remplaçant dans cette équation $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ respectivement par

$$\begin{gathered} x-x_1, \quad y-y_1, \quad z-z_1, \\ y_1 z-z_1 y, \quad z_1 x-x_1 z, \quad x_1 y-y_1 x, \end{gathered}$$

ce qui donne

$$F[x-x_1, y-y_1, z-z_1, (y_1, z), (z_1, x), (x_1, y)] = 0,$$

équation de degré n.

Si l'on porte l'origine au sommet du cône, cette équation devient simplement

$$F[x, y, z, (y, z), (z_1, x), (x_1, y)] = 0.$$

Soit (x, y, z) un point quelconque d'une droite du complexe faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à l_1, m_1 et n_1; l'équation (1) pourra se mettre sous la forme

$$F(l_1, m_1, n_1, n_1 y-m_1 z, l_1 z-n_1 x, m_1 x-l_1 y) = 0.$$

12. Cherchons *la courbe du complexe* située dans le plan

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1.$$

Soient l, m, n, λ, μ, ν les coordonnées d'une droite du complexe située dans ce plan ; nous aurons

$$\begin{aligned} l &= \beta\nu - \gamma\mu, \\ m &= \gamma\lambda - \alpha\nu, \\ n &= \alpha\mu - \beta\lambda; \end{aligned}$$

en remplaçant l, m et n par ces valeurs dans l'équation du complexe, nous aurons

$$(2)\qquad F(\beta\nu - \gamma\mu, \gamma\lambda - \alpha\nu, \alpha\mu - \beta\lambda, \lambda, \mu, \nu) = 0,$$

et, si l'on regarde λ, μ et ν comme des coordonnées cartésiennes, cette équation représente le cône réciproque de celui qui a son sommet à l'origine et pour base la courbe du complexe située dans le plan (1).

L'équation (2) étant d'ordre n, la courbe en question est de la $n^{\text{ième}}$ classe.

13. Cherchons enfin la courbe du complexe située dans le plan

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

qui passe par l'origine.

Soit (x_1, y_1, z_1) le pôle d'une droite du complexe située dans ce plan par rapport au cercle de rayon égal à l'unité et ayant son centre à l'origine. La droite elle-même aura pour équations

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + zz_1 &= 1, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0 \end{aligned}$$

et, par suite, pour coordonnées (6),

$$\begin{gathered} l = \beta z_1 - \gamma y_1, \qquad m = \gamma x_1 - \alpha z_1, \qquad n = \alpha y_1 - \beta x_1, \\ \lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \gamma. \end{gathered}$$

En portant ces valeurs dans l'équation du complexe et supprimant les indices, il vient

$$F(\beta z - \gamma y, \gamma x - \alpha z, \alpha y - \beta x, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

pour l'équation de la polaire réciproque de la courbe cherchée.

III.

14. Revenons maintenant à la question du concours d'agrégation.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde donné,

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

celles de l'une des droites D.

La polaire de cette droite par rapport à l'ellipsoïde est l'intersection du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) et du plan diamétral conjugué de la droite D; elle a donc pour équations

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1,$$

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0;$$

elle fait donc avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$a^2(ny_1 - mz_1), \quad b^2(lz_1 - nx_1), \quad c^2(mx_1 - ly_1),$$

ou à λ, μ et ν, et la condition du problème donne immédiatement

$$(1)\qquad a^2 l\lambda + b^2 m\mu + c^2 n\nu = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre.

Cette équation ne change pas si l'on remplace a^2, b^2 et c^2 par $\sigma a^2 + \rho$, $\sigma b^2 + \rho$ et $\sigma^2 + \rho$ respectivement, σ et ρ étant deux nombres quelconques; nous dirons donc que le complexe appartient à toutes les surfaces du second ordre ayant pour équation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\sigma a^2 + \rho} + \frac{y^2}{\sigma b^2 + \rho} + \frac{z^2}{\sigma c^2 + \rho} = 1.$$

Cette équation représente l'ensemble de toutes les surfaces du second ordre homothétiques et coaxiales à l'ellipsoïde donné ou, ce qui est la même chose, l'ensemble des surfaces homofocales des ellipsoïdes homothétiques et coaxiaux à l'ellipsoïde donné.

L'équation (1) est satisfaite pour $m = n = 0$ (ce qui entraîne $l = 0$ ou $\lambda = 0$) et pour $\mu = \nu = 0$ (ce qui entraîne $\lambda = 0$ ou $l = 0$); donc toutes les droites passant par l'origine, toutes les parallèles aux axes principaux de l'ellipsoïde, toutes les droites situées dans le plan de l'infini et enfin toutes celles situées dans l'un des plans principaux de l'ellipsoïde font partie du complexe.

Le complexe contient aussi toutes les normales aux surfaces du second ordre représentées par l'équation (2).

En effet, la normale au point (x_1, y_1, z_1) de l'une de ces surfaces a pour équations

$$\frac{x - x_1}{\dfrac{x_1}{\sigma a^2 + \rho}} = \frac{y - y_1}{\dfrac{y_1}{\sigma b^2 - \rho}} = \frac{z - z_1}{\dfrac{z_1}{\sigma c^2 + \rho}},$$

et ses coordonnées, qui ont pour expression

$$l = \frac{x_1}{\sigma a^2 + \rho}, \qquad m = \frac{y_1}{\sigma b^2 + \rho}, \qquad n = \frac{z_1}{\sigma c^2 + \rho},$$

$$\lambda = \frac{\sigma y_1 z_1 (b^2 - c^2)}{(\sigma b^2 + \rho)(\sigma c^2 + \rho)},$$

$$\mu = \frac{\sigma z_1 x_1 (c^2 - a^2)}{(\sigma c^2 + \rho)(\sigma a^2 + \rho)},$$

$$\nu = \frac{\sigma x_1 y_1 (a^2 - b^2)}{(\sigma a^2 + \rho)(\sigma b^2 + \rho)},$$

satisfont identiquement à l'équation (1).

Le complexe comprend par suite les axes de toutes les quadriques représentées par l'équation (2), et aussi les axes principaux de tous les cônes circonscrits à ces surfaces.

15. Si de l'équation du complexe

(1) $$a^2 l\lambda + b^2 m\mu + c^2 n\nu = 0$$

nous retranchons l'identité

$$a^2(l\lambda + m\mu + n\nu) = 0,$$

il vient

$$(b^2 - a^2) m\mu + (c^2 - a^2) n\nu = 0,$$

ou bien, x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées d'un point quelconque d'une droite du complexe,

$$(b^2 - a^2) m(l z_1 - m x_1) = (a^2 - c^2) n(m x_1 - l y_1),$$

ou enfin

$$\frac{\dfrac{z_1}{n} - \dfrac{x_1}{l}}{\dfrac{x_1}{l} - \dfrac{y_1}{m}} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}.$$

Mais, si A, B et C sont les points où la droite considérée perce les plans coordonnés, le premier membre de la relation précédente équivaut à $\frac{MC - MA}{MA - MB}$, c'est-à-dire à $\frac{CA}{AB}$.

L'équation (1) exprime donc cette propriété fondamentale du complexe, à savoir que toutes les droites qui en font partie sont coupées dans le même rapport par les plans principaux des surfaces du second ordre auxquelles il appartient.

16. Le cône du complexe, qui a son sommet au point x, a pour équation (n° 11)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a^2(x - x_1)(yz_1 - zy_1) + b^2(y - y_1)(zx_1 - xz_1)& \\ + c^2(z - z_1)(xy_1 - x_1y) &= 0, \end{aligned}\right.$$

ou bien, en supposant les axes transportés parallèlement à eux-mêmes au point (x_1, y_1, z_1),

$$(2)\quad (b^2 - c^2)x_1yz + (c^2 - a^2)y_1zx + (a^2 - b^2)z_1xy = 0.$$

Cette équation ne change pas quand on remplace x_1, y_1 et z_1 par kx_1, ky_1 et kz_1 respectivement. En d'autres termes, tous les cônes du complexe qui ont leurs sommets sur un diamètre de l'ellipsoïde ont une conique commune dans le plan à l'infini.

On obtient l'intersection du cône avec le plan des yz en faisant $x = 0$ dans l'équation (1), ce qui donne

$$-a^2(yz_1 - zy_1) + b^2(y - y_1)zx_1 - c^2(z - z_1)yx_1 = 0$$

ou bien

$$(b^2 - c^2)y^2 - (c^2 - a^2)y_1z - (a^2 - b^2)z_1y = 0,$$

équation indépendante de x_1. Donc tous les cônes du complexe qui ont leurs sommets sur une droite parallèle à un axe principal de l'ellipsoïde rencontrent le plan principal normal suivant une même hyperbole équilatère.

17. L'équation (2) du paragraphe précédent montre qu'un cône du complexe ne peut se réduire à un système de deux plans que si l'une ou l'autre des coordonnées x_1, y_1, z_1 est nulle, c'est-à-dire si le sommet du cône est situé dans l'un ou l'autre des plans principaux de l'ellipsoïde.

D'un autre côté, un cylindre quelconque du complexe ayant pour équation (n° 11)

$$(2)\quad a^2 l(ny - mz) + b^2 m(lz - nx) + c^2 n(mx - ly) = 0$$

se décompose lui-même en un système de deux plans, le plan à l'infini et celui qui est représenté par l'équation (2).

On voit ainsi que la *surface singulière* du complexe, considérée comme le lieu des sommets des cônes du complexe qui se réduisent à un système de deux plans, se compose de quatre plans, savoir les trois plans principaux de l'ellipsoïde et le plan à l'infini.

18. Le cône du complexe qui à son sommet au point (x_1, y_1, z_1), ayant pour équation

$$(b^2 - c^2)x_1 yz + (c^2 - a^2)y_1 zx + (a^2 - b^2)z_1 xy = 0,$$

est un cône de révolution pour

$$(b^2 - c^2)^2 x_1^2 = (c^2 - a^2)^2 y_1^2 = (a^2 - b^2)^2 z_1^2$$

ou, en supprimant les indices,

$$(b^2 - c^2)x = \pm(c^2 - a^2)y = \pm(a^2 - b^2)z,$$

équations de quatre droites passant par l'origine et symétriques deux à deux par rapport aux plans principaux de l'ellipsoïde.

19. Soit

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

l'équation d'un plan quelconque. Le cône réciproque de celui qui a son sommet à l'origine et pour base la courbe du complexe située dans ce plan a pour équation (n° 12)

$$a^2x(\beta z - \gamma y) + b^2y(\gamma x - \alpha z) + c^2z(\alpha y - \beta x) = 0$$

ou bien

$$(2) \qquad (b^2 - c^2)\,\alpha yz + (c^2 - a^2)\,\beta zx + (a^2 - b^2)\,\alpha xy = 0.$$

Ce cône contient les axes et la normale au plan (1); donc la courbe du complexe est une parabole tangente aux intersections de son plan avec les plans principaux de l'ellipsoïde.

20. L'équation (2) du paragraphe précédent est indépendante de δ et, par suite, elle ne change pas quand le plan (1) se meut parallèlement à lui-même. Donc les courbes du complexe situées dans des plans parallèles sont sur un cône du second ordre dont le sommet est à l'origine.

Ce cône, qui est le réciproque du cône (2), a pour équation

$$\sqrt{(b^2 - c^2)\,\alpha x} + \sqrt{(c^2 - a^2)\,\beta y} + \sqrt{(a^2 - b^2)\,\gamma z} = 0,$$

et il est de révolution si l'on a

$$\alpha(b^2 - c^2) = \pm\,\beta(c^2 - a^2) = \pm\,\gamma(a^2 - b^2),$$

c'est-à-dire lorsque les plans des courbes du complexe sont perpendiculaires à l'une ou l'autre des quatre droites trouvées ci-dessus (n° 18).