R. DE CRÈS

Solution de la question du concours d'admission à l'École normale (1886)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 369-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__369_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1886);

PAR M. R. DE CRÈS,
Ingénieur civil.

On considère les courbes du troisième degré C, *représentées par l'équation*

$$(1) \qquad x^2 y + a^2 x = \lambda,$$

où λ *désigne un paramètre variable :*

1° *Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce, tangentes à une droite quelconque* D *du plan ayant pour équation*

$$(2) \qquad y = mx + p,$$

et calculer les coordonnées (α, β), (α', β') *des deux points de contact* M *et* M'.

Pour qu'une courbe C touche la droite D en un point dont l'abscisse est x', il faut et il suffit que l'équation

$$mx^3 + px^2 + a^2 x - \lambda = 0,$$

aux abscisses des points communs à la courbe et à la droite, ait pour racines

$$x', \quad x', \quad -\left(\frac{p}{m} + 2x'\right);$$

ce qui, en vertu des relations entre les coefficients et les racines, s'exprime par les relations

$$(3) \qquad 3mx'^2 + 2px' + a^2 = 0,$$

$$(4) \qquad x'^2\left(2x' + \frac{p}{m}\right) = \lambda.$$

L'équation (3) donne pour x' deux valeurs réelles ou imaginaires, à chacune desquelles répond une valeur de λ fournie par la relation (4).

Il y a donc deux courbes C tangentes à la droite D et les coordonnées des deux points de contact $M(\alpha, \beta)$, $M'(\alpha', \beta')$ sont données par les formules

$$(5) \qquad \alpha = \frac{-p+\sqrt{p^2-3ma^2}}{3m},$$

$$(6) \qquad \beta = m\alpha + p = \frac{2p+\sqrt{p^2-3ma^2}}{3},$$

$$(5') \qquad \alpha' = \frac{-p-\sqrt{p^2-3ma^2}}{3m},$$

$$(6') \qquad \beta' = m\alpha' + p = \frac{2p-\sqrt{p^2-3ma^2}}{3}.$$

2° *Distinguer les droites* D *pour lesquelles les deux points* M *et* M' *sont réels des droites pour lesquelles ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite* D *les deux points* M *et* M' *viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.*

Les points M et M' sont confondus lorsqu'on a

$$(7) \qquad p^2 - 3ma^2 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la droite D a une équation de la forme

$$y = mx \pm a\sqrt{3m};$$

mais cette droite enveloppe l'hyperbole

$$(8) \qquad 4xy - 3a^2 = 0;$$

et l'équation aux abscisses des points communs à cette hyperbole et à la droite (1) montre que cette droite (1) coupe l'hyperbole ou lui est extérieure suivant que l'expression $p^2 - 3ma^2$ est positive ou négative. Donc les points M et M' sont réels et distincts, confondus ou imaginaires suivant que la droite D coupe l'hyperbole (8), la touche ou lui est extérieure.

Lorsque les points M et M' sont confondus, les valeurs (5) et (6), (5') et (6') se réduisent à

$$\alpha_1 = -\frac{p}{3m}, \qquad \beta_1 = \frac{2p}{3},$$

et il suffit d'éliminer p et m entre ces relations et la condition (7) pour avoir l'équation

$$3\alpha_1\beta_1 + 2a^2 = 0,$$

du lieu décrit par le point de contact; c'est une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

3° *Connaissant les coordonnées* (α, β) *du point de contact* M *d'une courbe* C *avec une droite* D, *trouver les coordonnées* (α', β') *du second point de contact* M' *situé sur* D. *Construire la courbe décrite par le point* M' *lorsque le point* M *décrit la droite*

$$(9) \qquad \beta = \alpha - 2a.$$

Les abscisses α et α' étant les racines de l'équation (3), on a

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = -\frac{2p}{a^2}, \qquad \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha'} = \frac{3m}{a^2};$$

et, en portant ces valeurs de m et de p dans

$$\beta = m\alpha + p, \qquad \beta' = m\alpha' + p,$$

on obtient les relations

$$\beta = -\frac{a^2}{6}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{3}{\alpha}\right); \qquad \beta' = -\frac{a^2}{6}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha'}\right),$$

d'où l'on déduit, soit

$$(10) \qquad \alpha' = -\frac{a^2\alpha}{3(2\alpha\beta + a^2)}, \qquad \beta' = \frac{9\alpha\beta + 4a^2}{3\alpha},$$

soit

$$\alpha = -\frac{a^2\alpha'}{3(2\alpha'\beta' + a^2)}, \qquad \beta = \frac{9\alpha'\beta' + 4a^2}{3\alpha'}.$$

Enfin, il suffit de porter ces valeurs de α et de β dans (9) pour avoir l'équation

$$18x^2y^2 + 12ax^2y + 17a^2xy + a^2x^2 + 6a^3x + 4a^4 = 0,$$

du lieu que décrit le point M′ lorsque le point M parcourt la droite (9) (nous avons mis x et y au lieu de α' et β'). C'est une quartique dont la construction n'offre aucune difficulté, puisque l'équation est du second degré soit par rapport à x, soit par rapport à y. On peut aussi se servir des expressions (10), après y avoir remplacé β par la valeur (9), pour construire la courbe qui est unicursale.

MM. Chambon et Barisien ont aussi envoyé des solutions de cette question.