NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Théories de la réfraction astronomique et de l'aberration

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 335-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__335_1>

THÉORIES DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE ET DE L'ABERRATION (¹);

PAR M. OSSIAN BONNET.

La direction suivant laquelle la lumière qui émane d'une étoile arrive à l'observateur diffère de la ligne droite qui joindrait l'œil de l'observateur à cet astre. Cette différence tient à deux causes distinctes : d'une

(¹) Leçons faites en 1887 à la Sorbonne pour les candidats à la Licence.

part, c'est l'atmosphère terrestre qui, infléchissant les rayons lumineux, nous fait voir les astres au-dessus de leurs positions réelles; d'autre part, la vitesse de translation de notre globe ayant un rapport fini avec la vitesse de la lumière, nous apercevons les étoiles en avant de leurs véritables positions dans le sens du mouvement de la Terre. Les théories de la réfraction astronomique et de l'aberration ont pour objet le calcul de ces deux effets, de telle sorte qu'on puisse corriger les observations, c'est-à-dire déduire les directions vraies des directions apparentes.

Nous commencerons par le phénomène de la réfraction, qui est le plus important.

Réfraction astronomique.

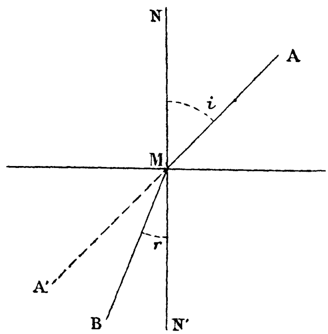
§ I. — Notions préliminaires.

La lumière se meut en ligne droite dans le vide ou dans un milieu homogène. Mais, si un rayon lumineux passe d'un milieu homogène dans un autre milieu homogène, de densité différente, il se réfracte, c'est-à-dire est dévié de sa direction primitive, conformément aux trois lois expérimentales dont nous rappellerons d'abord les énoncés :

Première loi — *Le rayon incident* AM (*fig.* 1), *le rayon réfracté* MB *et la normale* NMN' *à la surface* (*plane ou courbe*) *de séparation des deux milieux sont dans un même plan.*

Deuxième loi. — *Pour les deux mêmes milieux, le* *rapport du sinus de l'angle i d'incidence au sinus de l'angle r de réfraction est constant quelle que soit la direction du rayon incident.*

Fig. 1.

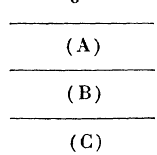


Ce rapport $\frac{\sin i}{\sin r}$ est appelé *indice de réfraction du second milieu par rapport au premier.*

Si le rayon lumineux passe du vide dans un milieu quelconque, le rapport $\frac{\sin i}{\sin r}$ se nomme *indice absolu de réfraction de ce milieu.*

Troisième loi. — *Soient trois milieux homogènes successifs* (*fig.* 2) *que nous appellerons* (A), (B), (C); *si n est*

Fig. 2.



l'indice de réfraction du milieu (B) *par rapport au milieu* (A), *n' l'indice du milieu* C *par rapport au mi-*

lieu (B), *le produit* nn' *sera égal à l'indice de réfraction du milieu* (C) *par rapport au milieu* (A).

. De ces trois lois résultent plusieurs conséquences :

1° (A) et (B) étant deux milieux homogènes quelconques, si n est l'indice de réfraction du milieu (B) par rapport au milieu (A), l'inverse $\frac{1}{n}$ sera l'indice de réfraction du milieu (A) par rapport au milieu (B); il suffit, pour le démontrer, d'appliquer la troisième loi au cas où le troisième milieu (C) est identique au premier milieu (A).

2° n' et n'' étant les indices absolus de réfraction de deux milieux homogènes (A′) et (A″) et n l'indice de réfraction du milieu (A″) par rapport au milieu (A′), on a

$$n = \frac{n''}{n'}.$$

Il suffit encore d'appliquer la troisième loi en supposant que le milieu (C) devienne le vide, puis de tenir compte de la propriété précédente.

3° Soient (*fig.* 3)

$$A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_4, \quad \ldots, \quad A_{p-1}A_p, \quad A_pA_{p+1}$$

les chemins rectilignes successivement parcourus par un rayon lumineux qui traverse une suite de milieux homogènes séparés chacun du suivant par une surface quelconque et ayant pour indices absolus de réfraction respectifs

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \ldots, \quad n_{p-1}, \quad n_p.$$

La somme

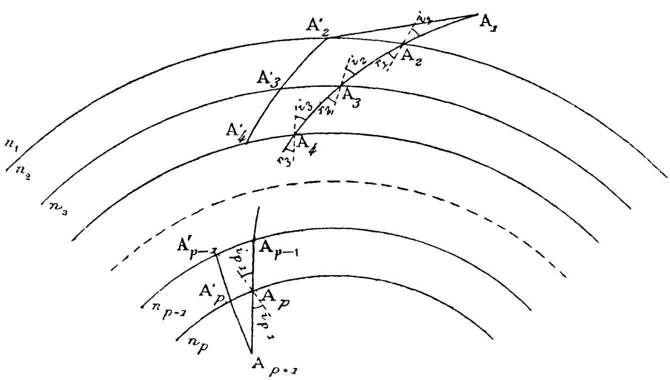
$$A_1A_2 . n_1 + A_2A_3 . n_2 + \ldots + A_{p-1}A_p . n_{p-1} + A_pA_{p+1} . n_p$$

ou

$$\sum_{k=1}^{k=p} A_k A_{k+1} . n_k$$

des produits obtenus en multipliant chaque chemin rectiligne élémentaire par l'indice du milieu auquel il se

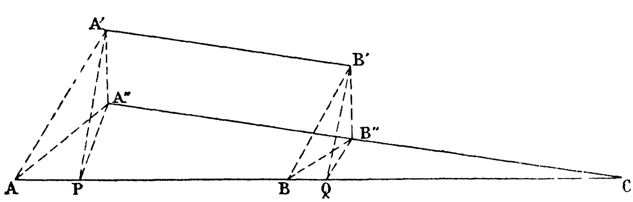
Fig. 3.



rapporte sera un minimum parmi les sommes analogues relatives à tous les ensembles de chemins rectilignes élémentaires que l'on peut inscrire à la suite l'un de l'autre dans les milieux successifs, de manière à former un polygone continu allant du point A_1 au point A_{p+1}.

Remarquons d'abord que, lorsque deux points A et B sont transportés en A' et B' à la suite de déplacements

Fig. 4.



rectilignes ou curvilignes infiniment petits, on a, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur aux déplacements,

$$A'B' - AB + AA' \cos A'AB + BB' \cos B'BA = 0 \text{ (1)}.$$

Ce théorème étant rappelé, considérons la propriété énoncée. Elle sera évidemment démontrée si nous faisons voir que, lorsque l'on déplace infiniment peu les points $A_2, A_3, \ldots, A_p$ chacun sur la surface de séparation à laquelle il appartient, de manière à les amener

---

(1) Voici une démonstration élémentaire de cette proposition bien connue :

On peut se borner à considérer le cas où AA′ et BB′ sont rectilignes; car, lorsque AA′ par exemple est curviligne, le remplacement de AA′ par sa corde et de l'angle que nous avons appelé A′AB, et qui est celui de la tangente en A à AA′ avec AB par l'angle de la corde AA′ avec AB, n'introduit que des termes de second ordre que nous négligeons par hypothèse.

Cela posé, projetons A′B′ : 1° en A″B″ sur le plan mené par AB parallèlement à A′B′; 2° en PQ sur AB; menons d'ailleurs A″P et B″Q qui seront évidemment perpendiculaires à AB, nous aurons

$$AP = AA' \cos A'AB = AA'' \cos A''AB,$$
$$BQ = -BB' \cos B'BA = -BB'' \cos B''BA$$

et

$$A'B' = A''B'' ;$$

mais, en prolongeant A″B″ et AB jusqu'à leur rencontre en C, les deux triangles A″AC, B″BC donnent successivement

$$AC = A''A \cos A''AC + A''C \cos C, \qquad BC = B''B \cos B''BC + B''C \cos C ;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$AB = A''A \cos A''AC - B''B \cos B''BC + A''B'' \cos C,$$

et comme, d'après la relation

$$\sin C = AA'' \frac{\sin A''AC}{A''C},$$

C est infiniment petit du même ordre au moins que AA′ et que BB′, on peut écrire

$$A''B'' - AB + AA'' \cos A''AC + BB'' \cos B''BA = 0,$$

ou

$$A'B' - AB + AA' \cos A'AC + BB' \cos B'BA = 0,$$

en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au premier.

respectivement en A'_2, $A'_3, \ldots$, A'_p, la somme

$$A_1A_2 . n_1 + A_2A_3 . n_2 + A_3A_4 . n_3 + \ldots \\ + A_{p-1}A_p . n_{p-1} + A_pA_{p+1} . n_p,$$

qui devient

$$A_1A'_2 . n_1 + A'_2A'_3 . n_2 + A'_3A'_4 . n_3 + \ldots \\ + A'_{p-1}A'_p . n_{p-1} + A'_pA_{p+1} . n_p,$$

conserve la même valeur aux infiniment petits près d'un ordre supérieur aux déplacements.

Or désignons par Δ la différence entre ces deux sommes, c'est-à-dire l'expression

$$\begin{aligned}\Delta = &(A_1A'_2 - A_1A_2)\, n_1 + (A'_2A'_3 - A_2A_3)\, n_2 \\ &+ (A'_3A'_4 - A_3A_4)\, n_3 + \ldots \\ &+ (A'_{p-1}A'_p - A_{p-1}A_p)\, n_{p-1} + (A'_pA_{p+1} - A_pA_{p+1})\, n_p.\end{aligned}$$

Appelons i_1 et r_1 les angles d'incidence et de réfraction lors du passage de la lumière du premier dans le second milieu, i_2 et r_2 les angles d'incidence et de réfraction lors du passage de la lumière du second dans le troisième milieu, enfin i_{p-1} et r_{p-1} les angles d'incidence et de réfraction lors du passage de la lumière du $(p - 1)^{\text{ième}}$ milieu dans le $p^{\text{ième}}$. Nous aurons d'après le lemme établi ci-dessus et en négligeant toujours les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$\begin{aligned}&A_1A'_2 - A_1A_2 = A_2A'_2 \sin i_1, \\ &A'_2A'_3 - A_2A_3 = - A_2A'_2 \sin r_1 + A_3A'_3 \sin i_2, \\ &A'_3A'_4 - A_3A_4 = - A_3A'_3 \sin r_2 + A_4A'_4 \sin i_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &A'_{p-1}A'_p - A_{p-1}A_p = - A_{p-1}A'_{p-1} \sin r_{p-2} + A_pA'_p \sin i_{p-1}, \\ &A'_pA_{p+1} - A_pA_{p+1} = - A_pA'_p \sin r_{p-1}.\end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après avoir multiplié la première par n_1, la seconde par n_2, la troisième par $n_3, \ldots$, la dernière par n_p; nous aurons d'abord, comme premier membre de l'équation résultante, la différence Δ; quant au second membre, si l'on a soin, en l'évaluant, de grouper le terme positif du second membre de chaque équation partielle avec le terme négatif du second membre de l'équation partielle suivante, ce qui entraîne l'emploi de tous les termes, car la première équation n'a pas de terme négatif et la dernière n'a pas de terme positif, il prendra la forme

$$\begin{aligned} &A_2 A'_2 (n_1 \sin i_1 - n_2 \sin r_1) \\ &\quad + A_3 A'_3 (n_2 \sin i_2 - n_3 \sin r_2) \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + A_{p-1} A'_{p-1} (n_{p-2} \sin i_{p-2} - n_{p-1} \sin r_{p-2}) \\ &\quad + A_p A'_p (n_{p-1} \sin i_{p-1} - n_p \sin r_{p-1}); \end{aligned}$$

mais $\frac{\sin i_k}{\sin r_k}$ est, quel que soit k, l'indice de réfraction du $(k+1)^{\text{ième}}$ milieu par rapport au $(k)^{\text{ième}}$, c'est-à-dire $\frac{n_{k+1}}{n_k}$; donc

$$n_k \sin i_k - n_{k+1} \sin r_k = 0;$$

de là résulte que le second membre de l'équation résultante est nul, et par suite qu'il en est de même de Δ.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que de la marche de la lumière à travers une suite de milieux homogènes successifs ayant chacun des dimensions finies et une densité particulière n'obéissant d'ailleurs à aucune loi. Le problème ainsi posé ne convient pas aux cas de la nature; en réalité, on n'a à considérer qu'un seul milieu, non homogène et dont la densité, bien déterminée en chaque point, varie d'un point à l'autre et est une fonction en général continue des trois coordonnées x, y, z qui fixent la position du point du milieu auquel elle se rapporte. Les points pour lesquels la densité est la même appartiennent à une surface et ne constituent pas un volume ou un milieu.

L'indice absolu de réfraction est également bien défini pour chaque point M de l'espace, mais varie d'une manière continue avec la position de ce point. Il n'est autre que celui qui se rapporte au passage de la lumière du vide dans un milieu de dimensions finies, ayant partout la même densité que le milieu considéré au point M. Enfin il existe des surfaces d'égal indice absolu de réfraction, lesquelles coïncident avec celles d'égale densité et jouent le même rôle que les surfaces de séparation de deux milieux consécutifs.

Quant à la marche de la lumière, il est évident qu'elle s'effectue non plus sur un polygone, mais sur une courbe, et que celle-ci, d'après le théorème que nous avons démontré en dernier lieu, jouit de la propriété d'être, parmi toutes les courbes qui joignent le point de départ A de la lumière au point d'arrivée B, celle qui rend minimum l'intégrale $\int n\,ds$, où s est l'arc de la courbe compté à partir de A, n l'indice absolu de réfraction du milieu pour l'extrémité de s et qui s'étend depuis A jusqu'à B. C'est cette propriété que nous prendrons comme définition de la trajectoire lumineuse, et l'on va voir qu'elle conduit aisément aux équations différentielles de cette courbe.

§ II. — Équations différentielles de la trajectoire lumineuse.

Soient AMB la trajectoire lumineuse allant de A en B et AM′B une courbe quelconque infiniment voisine ayant les mêmes extrémités. Considérons les valeurs de l'intégrale $\int n\,ds$ définie précédemment : 1° pour AMB, 2° pour AM′B, et appelons $\int n\,ds$ et $\int n'\,ds'$ ces valeurs.

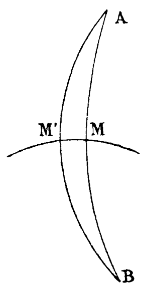
D'après la définition même, $\int n\,ds$ étant plus petit que toutes les valeurs de $\int n' ds'$, la différence

$$\int n' ds' - \int n ds$$

devra être nulle en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre. Évaluons donc cette différence.

Il s'agit, comme on voit, de la différence de deux sommes; or le moyen le plus simple, en pareil cas, consiste à faire correspondre à chaque élément de la première somme un élément convenablement choisi de la seconde, à prendre la différence des éléments correspondants et à faire la somme des résultats obtenus. As-

Fig. 5.



socions à l'élément de la première somme qui se rapporte à un point quelconque M de AB (*fig.* 5) l'élément de la seconde somme qui se rapporte au point M' de AM'B pour lequel l'indice absolu de réfraction est le même qu'en M; nous aurons alors, pour la différence cherchée,

$$\int n (ds' - ds)$$

ou, à un infiniment petit près du second ordre,

$$\int n \delta ds,$$

en représentant par la caractéristique δ les différentielles totales relatives à des variations qui laissent n constant et qui, par suite, correspondent à des déplacements effectués d'une manière quelconque sur une surface d'égal indice absolu de réfraction. La condition qui définit la trajectoire lumineuse est donc

$$(1) \qquad \int n\,\delta\,ds = 0.$$

Mais x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point du milieu et la caractéristique d représentant toujours les différentielles relatives à un déplacement effectué sur la courbe AMB, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d'où

$$\delta\,ds = \frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + \frac{dy}{ds}\,\delta\,dy + \frac{dz}{ds}\,\delta\,dz;$$

l'équation (1) prend donc la forme

$$(2) \qquad \int \left(n\frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + n\frac{dy}{ds}\,\delta\,dy + n\frac{dz}{ds}\,\delta\,dz \right) = 0,$$

que l'on peut, en intervertissant l'ordre des différentiations correspondant à d et à δ dans chaque terme, écrire ainsi

$$(2\ bis) \qquad \int n\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \int n\frac{dy}{ds}\,d\delta y + \int n\frac{dz}{ds}\,d\delta z = 0.$$

Intégrons par parties; le premier terme donne

$$\int n\frac{dx}{ds}\,d\,\delta x = \left(n\frac{dx}{ds}\,\delta x\right)_0^1 - \int \delta x\,d.n\frac{dx}{ds},$$

$\left(n\frac{dx}{ds}\,\delta x\right)_0^1$ étant la différence des valeurs de $n\frac{dx}{ds}\,\delta x$, pour les limites des intégrales, c'est-à-dire pour les extrémités de la trajectoire lumineuse; mais on a $\delta x = 0$ à ces deux extrémités, puisque, lorsqu'on passe de AMB à AM′B, les extrémités sont conservées; donc

$$\int n\frac{dx}{ds}\,d\,\delta x = -\int \delta x\,d.n\frac{dx}{ds}.$$

On verrait de même que

$$\int n\,\frac{dy}{ds}\,d\,\delta y = -\int \delta y\,d.n\,\frac{dy}{ds},$$

$$\int n\,\frac{dz}{ds}\,d\,\delta z = -\int \delta z\,d.n\,\frac{dz}{ds};$$

donc l'égalité (2 *bis*) devient

$$(3)\qquad \int\left(\delta x\,d.n\,\frac{dx}{ds} + \delta y\,d.n\,\frac{dy}{ds} + \delta z\,d.n\,\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Les différentielles totales δx, δy, δz ne sont pas entièrement indépendantes, mais elles ne sont liées que par une seule relation, celle qui exprime que ces différentielles laissent n constant et qui est

$$\frac{\partial n}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial n}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial n}{\partial z}\,\delta z = 0;$$

en tirant de cette relation la valeur de δz en fonction de δx et de δy et la portant dans l'équation (3), on obtient

$$\int\left[\delta x\left(d.n\,\frac{dx}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial z}}\,d.n\,\frac{dz}{ds}\right) + \delta y\left(d.n\,\frac{dy}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial y}}{\frac{\partial n}{\partial z}}\,d.n\,\frac{dz}{ds}\right)\right],$$

où dès lors δx et δy sont tout à fait quelconques en grandeur et en signe; on voit par là que l'on doit avoir, en tous les points de la courbe,

$$(4)\qquad d.n\,\frac{dx}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial z}}\,d.n\,\frac{dz}{ds} = 0, \qquad d.n\,\frac{dy}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial y}}{\frac{\partial n}{\partial z}}\,d.n\,\frac{dz}{ds} = 0;$$

car, s'il en était autrement, on pourrait disposer de δx et de δy de façon que les éléments de l'intégrale fussent tous de même signe, et l'intégrale ne serait pas nulle.

Les conditions (4), que l'on écrit ordinairement sous la forme d'une suite de rapports égaux,

$$(4\ bis)\qquad \frac{d.n\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{\partial n}{\partial x}} = \frac{d.n\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{\partial n}{\partial y}} = \frac{d.n\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{\partial n}{\partial z}},$$

sont les équations différentielles de la trajectoire lumineuse. Ces équations ne peuvent être intégrées que dans des cas très particuliers; mais elles fournissent plusieurs résultats utiles que nous allons faire connaître.

§ III. — Propriétés générales des trajectoires lumineuses.

Ajoutons terme à terme les rapports (*4 bis*, § II), après avoir effectué les différentiations indiquées et avoir multiplié les deux termes du premier rapport par $\frac{dx}{ds}$, les deux termes du second rapport par $\frac{dy}{ds}$, les deux termes du troisième rapport par $\frac{dz}{ds}$; il viendra, pour la valeur commune des trois rapports,

$$\frac{dn\left[\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2\right]+n\left(\dfrac{dx}{ds}\,d\,\dfrac{dx}{ds}+\dfrac{dy}{ds}\,d\,\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{dz}{ds}\,d\,\dfrac{dz}{ds}\right)}{\dfrac{\partial n}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}+\dfrac{\partial n}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{\partial n}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}},$$

ou simplement ds, à cause des relations

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

$$\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}=0,$$

$$\frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial n}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial n}{\partial z}\frac{dz}{ds}=\frac{dn}{ds}.$$

Cela posé, on aura les trois équations

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\left(n\,\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial x},\\
\frac{d\left(n\,\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial y},\\
\frac{d\left(n\,\dfrac{dz}{ds}\right)}{\partial s} &= \frac{\partial n}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

dont l'emploi simultané offre de grands avantages, mais qu'il ne faudrait cependant pas regarder comme distinctes, car, en réalité, elles se réduisent à deux.

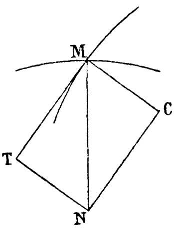
Si l'on effectue enfin les différentiations indiquées dans les équations (5), on trouve les relations suivantes

$$
(1\ bis)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dn}{ds}\,\frac{dx}{ds} + n\,\frac{d\,\dfrac{dx}{ds}}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial x},\\
\frac{dn}{ds}\,\frac{dy}{ds} + n\,\frac{d\,\dfrac{dy}{ds}}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial y},\\
\frac{dn}{ds}\,\frac{dz}{ds} + n\,\frac{d\,\dfrac{dz}{ds}}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

qui se résument en une propriété géométrique élégante, donnant sur-le-champ tout ce que l'on connaît de général sur les trajectoires lumineuses.

On sait que $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles que la tangente positive à la courbe AMB fait avec les axes des coordonnées et qu'en appelant ρ le rayon de courbure, $\rho\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \rho\,\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \rho\,\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$ sont les cosinus des angles que la normale principale prolongée de la courbe vers le centre de courbure fait avec les mêmes axes; donc les premiers termes $\frac{dn}{ds}\frac{dx}{ds}$, $\frac{dn}{ds}\frac{dy}{ds}$, $\frac{dn}{ds}\frac{dz}{ds}$ des premiers membres des trois équations (5 *bis*) sont les projections

Fig. 6.



respectives sur l'axe des x, sur l'axe des y et sur l'axe des z, d'une droite MT égale à $\frac{dn}{ds}$ et dirigée suivant la tangente positive à la trajectoire lumineuse, et les seconds termes $n\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $n\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $n\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$ des premiers membres des mêmes équations sont les projections respectives sur l'axe des x, sur l'axe des y et sur l'axe des z, d'une droite MC égale à $\frac{n}{\rho}$ et dirigée suivant la normale allant de la courbe au centre de courbure; d'ailleurs les seconds membres $\frac{\partial n}{\partial x}$, $\frac{\partial n}{\partial y}$, $\frac{\partial n}{\partial z}$ des équations (1 *bis*) sont les projections respectives sur l'axe des x, sur l'axe des y et sur l'axe des z d'une droite MN égale à

$$\sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)^2}=\Delta$$

et ayant pour cosinus directeurs

$$\frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\Delta},\quad \frac{\frac{\partial n}{\partial y}}{\Delta},\quad \frac{\frac{\partial n}{\partial z}}{\Delta},$$

c'est-à-dire qui est dirigée suivant la normale à la surface d'égal indice absolu de réfraction $n =$ const. Cela étant, on conclut du théorème fondamental des projections que la droite MN est la résultante géométrique des deux droites MT et MC, et par conséquent que le point M de la trajectoire lumineuse et les trois points T, N et C précédemment définis sont les sommets d'un parallélogramme qui, à cause de la perpendicularité de MC et de MT, est ici un rectangle. Ce théorème de Géométrie équivaut aux trois équations (5 *bis*); il montre immédiatement que le plan d'incidence TMN coïncide avec le plan osculateur TMC de la trajectoire lumineuse et que l'angle d'incidence $\mathrm{TMN} = i$ a pour tangente $\frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{TM}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{TM}} = \frac{n}{\rho \frac{dn}{ds}}$.

Ce dernier résultat

$$\operatorname{tang} i = \frac{n}{\rho \frac{dn}{ds}}$$

nous sera plus tard d'une grande utilité; on en déduit d'abord

$$\frac{ds}{\rho} = \operatorname{tang} i \,.\, \frac{dn}{n}$$

et, en intégrant depuis l'origine A jusqu'à l'extrémité B de la trajectoire lumineuse,

$$(2) \qquad \int \frac{ds}{\rho} = \int \operatorname{tang} i \,.\, \frac{dn}{n}.$$

Or deux cas sont à distinguer : la trajectoire peut être plane ou gauche.

Dans le premier cas, l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho}$ est évidemment l'angle que forment les tangentes à la courbe lumineuse en ses extrémités A et B, et par suite ce qu'on appelle la *réfraction totale* qu'éprouve la lumière pendant tout son trajet. Ainsi l'évaluation de cette réfraction, qui est, en définitive, l'objet véritable du problème à résoudre, se ramène à celle de l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$.

Si la trajectoire lumineuse n'est pas plane, l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$, quoique moins utile, a encore une signification remarquable.

Supposons que les rayons lumineux considérés soient ceux qui émanent d'une étoile et que le milieu traversé par ces rayons soit l'atmosphère; menons par l'œil de l'observateur des rayons de la sphère céleste respectivement parallèles aux différentes tangentes à la courbe lumineuse, depuis celle qui répond au point A jusqu'à celle qui correspond au point B; les extrémités de ces rayons seront les positions apparentes de l'étoile pendant le temps que la lumière émanée de l'étoile met à traverser l'atmosphère; donc le lieu de ces extrémités sera l'arc de courbe que paraîtra décrire l'étoile dans le même temps et l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho}$ sera ce que nous avons appelé la *distance angulaire* correspondant à cet arc de courbe.

§ IV. — Mouvement de la lumière émanée d'une étoile, a travers l'atmosphère, dans le cas ou la densité de celle-ci ne dépend que de la distance au centre de la Terre.

Nous allons appliquer les résultats généraux qui précèdent à un cas particulièrement utile en Astronomie, celui où il s'agit d'un rayon lumineux qui, émanant d'une étoile, c'est-à-dire partant du vide, arrive en un point de la surface de la Terre, après avoir traversé la masse gazeuse appelée atmosphère. Nous supposerons, comme on le fait communément, que la Terre est sphérique et que les surfaces d'égale densité ou d'égal indice absolu de réfraction de l'atmosphère sont des sphères concentriques à la Terre; nous conserverons d'ailleurs les mêmes notations que dans ce qui précède. Cela posé, si nous prenons le centre de la Terre pour origine des coordonnées, n sera une fonction de

$$x^2+y^2+z^2;$$

les dérivées partielles $\frac{\partial n}{\partial x}$, $\frac{\partial n}{\partial y}$, $\frac{\partial n}{\partial z}$ seront donc respectivement proportionnelles à x, y, z et les deux équations (4 *bis*) de la trajectoire lumineuse deviendront

$$\frac{d\left(n\,\frac{dx}{ds}\right)}{x}=\frac{d\left(n\,\frac{dy}{ds}\right)}{y}=\frac{d\left(n\,\frac{dz}{ds}\right)}{z},$$

que nous remplacerons par les trois suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &z\,d.n\,\frac{dy}{ds}-y\,d.n\,\frac{dz}{ds}=0,\\ &x\,d.n\,\frac{dz}{ds}-z\,d.n\,\frac{dx}{ds}=0,\\ &y\,d.n\,\frac{dx}{ds}-x\,d.n\,\frac{dy}{ds}=0.\end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont ici des différentielles exactes. En effet,

$$\begin{aligned} &z\,d.n\,\frac{dy}{ds}-y\,d.n\,\frac{dz}{ds}\\ &\quad=d.nz\,\frac{dy}{ds}-n\,\frac{dy\,dz}{ds}-d.ny\,\frac{dz}{ds}+n\,\frac{dz\,dy}{ds}\\ &\quad=d\left[n\left(z\,\frac{dy}{ds}-y\,\frac{dz}{ds}\right)\right],\end{aligned}$$

et de même

$$x\,d.n\frac{dz}{ds} - z\,d.n\frac{dx}{ds} = d\left[n\left(x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds}\right)\right],$$

$$y\,d.n\frac{dx}{ds} - x\,d.n\frac{dy}{ds} = d\left[n\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right)\right];$$

on peut donc faire immédiatement une première intégration pour chaque équation et, en appelant C, C′, C″ des constantes arbitraires, on trouve les trois équations différentielles du premier ordre

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} n\left(z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right) &= C,\\ n\left(x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds}\right) &= C',\\ n\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right) &= C'',\end{aligned}\right.$$

lesquelles, bien entendu, ne sont pas distinctes et se réduisent à deux.

Ces dernières équations conduisent encore à une autre qui est en termes finis; on n'a qu'à multiplier la première par x, la deuxième par y, la troisième par z et à ajouter membre à membre, ce qui donne

$$0 = Cx + C'y + C''z.$$

On voit alors que l'on peut, en définitive, prendre pour les deux équations qui définissent complètement la trajectoire lumineuse l'équation en termes finis

$$(a)\qquad Cx + C'y + C''z = 0,$$

et l'une des équations différentielles du premier ordre (2), l'équation

$$(b)\qquad n\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right) = C'',$$

par exemple.

L'équation (a) montre que le rayon lumineux se meut dans un plan passant par l'origine; ce plan n'est autre que le plan appelé *vertical* qui contient le rayon lumineux à un moment donné, au moment où il pénètre dans l'atmosphère ou lorsqu'il parvient à l'œil de l'observateur.

L'équation (b) est également susceptible d'une interprétation géométrique : en effet, d'après une formule connue, $y\,dx - x\,dy$ est la projection sur le plan des xy du double de l'aire infiniment petite $d\sigma$ décrite par le rayon vecteur r de la trajectoire et par conséquent est égal au produit de $2\,d\sigma$ par le cosinus de l'angle ω du plan de la trajectoire avec le plan des xy; mais $d\sigma$ est la surface d'un triangle ayant ds pour base et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du centre de la Terre sur la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire $r \sin i$; donc

$$n(y\,dx - x\,dy) = nr \sin i \cos\omega,$$

donc l'équation (6) peut s'écrire

$$nr \sin i \cos\omega = C'',$$

ou simplement

$$nr \sin i = K,$$

K étant une nouvelle constante.

La constante K est facile à déterminer : si nous appelons a le rayon de la Terre, n_0 l'indice absolu de réfraction pour la couche d'air qui est en contact avec la surface de la Terre et $\frac{\pi}{2} - z_a$ l'angle aigu sous lequel le rayon lumineux vient frapper la Terre, de façon que z_a soit la distance zénithale apparente de l'astre après que la lumière émanée de l'astre a traversé toute l'atmosphère, il est évident que $n_0\,a \sin z_a$ est la valeur particulière de $nr \sin i$ qui correspond à l'extrémité de la trajectoire; cette expression est donc égale à la constante K et nous pouvons écrire

$$(c) \qquad nr \sin i = n_0 a \sin z_a.$$

Nous terminerons là ce qui se rapporte à la recherche de la trajectoire lumineuse. La détermination complète de cette trajectoire n'est pas, en effet, indispensable pour le but que nous voulons atteindre ; ce qu'il importe de connaître, c'est le changement de direction subi par le rayon lumineux depuis le moment où il pénètre dans l'atmosphère, jusqu'à celui où il parvient à la surface de la Terre, c'est-à-dire ce que nous appellerons la *réfraction totale* R. Or, la trajectoire lumineuse étant plane, comme on l'a vu plus haut, la réfraction totale R est l'angle que forment les tangentes aux extrémités de cette courbe et par conséquent a pour valeur, d'après un résultat obtenu à la fin du paragraphe III, l'intégrale définie $\int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n}$, étendue de l'origine à l'extrémité de la courbe lumineuse. C'est de l'évaluation de cette intégrale que nous allons exclusivement nous occuper dans ce qui va suivre.

§ V. — Relations entre les divers éléments de l'atmosphère. — Transformations de l'intégrale définie $\int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n}$.

L'évaluation exacte de l'intégrale définie $\int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n}$ ne peut être entreprise qu'après avoir mis celle-ci sous la forme $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$, où x désigne la variable que l'on choisit pour fixer les différents points de la trajectoire lumineuse, $\varphi(x)$ une fonction bien déterminée de x, et x_0 et X les valeurs particulières de x qui se rapportent aux extrémités de la courbe. Or, dans l'état actuel de nos connaissances sur la constitution de l'atmosphère, ce premier pas est absolument impossible à franchir, quelle que soit d'ailleurs la transformation que l'on fasse subir à l'intégrale. En effet, les différentes quantités qui se rapportent à un point M de l'atmosphère sont, indépendamment du rayon vecteur r et de l'indice absolu de réfraction n déjà considérés, la densité ρ, la pression p rapportée à l'unité de surface, la gravité g, c'est-à-dire l'attraction terrestre rapportée à l'unité de masse, ou bien encore, d'après ce que l'on démontre en Mécanique, l'accélération du mouvement des corps pesants dans le vide, la température T indiquée par le thermomètre centigrade et la hauteur barométrique H; elles ne sont pas reliées entre elles par un nombre de relations suffisant pour permettre d'exprimer les quantités dont on a besoin en fonction de celle d'entre elles qui est prise comme variable indépendante et qui fixe la position des différents points de la trajectoire lumineuse. La seule chose que l'on puisse faire, c'est de se servir des relations connues pour mettre $\tang i \frac{dn}{n}$ sous différentes formes et de voir si, parmi ces formes diverses, il n'en est pas une qui, au moyen d'hypothèses permises et de restrictions convenables, permette d'évaluer l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$, sinon exactement, du moins avec une approximation suffisante pour les applications.

Avant de rappeler les lois auxquelles sont soumises les quantités r, n, ρ, p, g, T, H définies précédemment et auxquelles on donne le nom d'*éléments de l'atmosphère,* il ne sera pas inutile de bien préciser le sens que nous donnerons à ces éléments. Deux d'entre eux, n et T, sont des nombres abstraits d'après les définitions mêmes :

ils ne donnent donc lieu à aucune difficulté; les cinq autres seront aussi regardés comme des nombres abstraits, mais ces nombres n'auront rien d'absolu, ils résulteront de certaines conventions et de certaines propriétés géométriques ou mécaniques. On sait qu'en Mathématiques il existe trois entités essentielles et irréductibles : la longueur ou portion de droite, l'intervalle de temps, la masse d'un corps. On convient de remplacer une longueur, un intervalle de temps, une masse, pris chacun dans des circonstances bien déterminées et connues, par des nombres arbitrairement choisis, de manière à fixer ce qu'on appelle *les unités de longueur, de temps et de masse;* toutes les longueurs, tous les intervalles de temps, toutes les masses, sont alors remplacés par des nombres déterminés, car les rapports de deux longueurs, de deux intervalles de temps, de deux masses sont des nombres abstraits bien définis. Quant aux nombres représentant les autres éléments, nous les fixerons au moyen des égalités suivantes, que l'on emprunte à la Géométrie et à la Mécanique et qu'on démontre être vraies pour tous les cas, dès qu'elles ont lieu dans un cas particulier. Le nombre qui représente une surface de forme rectangulaire est égal au produit des nombres qui représentent la base et la hauteur et le nombre qui représente un volume de forme prismatique est égal au produit du nombre qui représente la surface de la base par le nombre qui représente la hauteur. Si l'on fait osciller un pendule simple dans le vide, le nombre τ qui représente la durée d'une oscillation, le nombre l qui représente la longueur du fil de suspension et le nombre g qui représente la gravité sont liés par la relation

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Le nombre qui représente la masse d'un corps est égal au nombre qui représente le volume multiplié par le nombre qui représente la densité ; enfin le nombre qui représente le poids d'un corps est égal au produit du nombre qui représente la masse par le nombre qui représente la gravité.

Revenons maintenant aux lois qui régissent les éléments de l'atmosphère, en supposant d'ailleurs ceux-ci préalablement évalués en nombre : ces lois sont au nombre de quatre et consistent en des relations entre les valeurs générales de r, n, ρ, p, g, H des éléments de l'atmosphère et les valeurs particulières r', n', ρ', p', g', H' qui se rapportent à un point déterminé M'.

1° Loi des puissances réfractives. — La fonction $n^2 - 1$ de l'indice absolu de réfraction n, appelée *puissance réfractive*, est proportionnelle à la densité ρ ; par conséquent on a

$$(a) \qquad \frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

2° Loi de Mariotte. — Si en un point quelconque M de l'atmosphère on considère un volume d'air V répondant à une masse déterminée, ce volume, préalablement ramené à la température de 0°, c'est-à-dire remplacé par ce qu'il devient lorsque la température passe de sa véritable valeur T à la valeur 0, est en raison inverse de la pression p. Or au volume V à la température T correspond le volume $\frac{V}{1 + mT}$ à la température de 0°, m étant le coefficient 0,003671 de dilatation de l'air ; donc le produit $\frac{Vp}{1 + mT}$ est constant. Mais, V répondant à une masse constante, $V\rho$ est aussi constant ; donc $\frac{p}{\rho(1 + mT)}$ est constant, et l'on a

$$(b)\qquad \frac{p}{p'} = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{1+mT}{1+mT'}.$$

3° Loi de la gravitation. — On sait qu'en appelant φ l'attraction exercée par une masse égale à 1 sur une autre masse égale à 1 placée à une distance égale à 1 de la première, l'attraction exercée par la Terre, dont nous désignerons la masse par μ, sur une masse égale à m placée en un point quelconque M de l'atmosphère, est $\frac{m\mu\varphi}{r^2}$; donc la gravité en M est $\frac{\mu\varphi}{r^2}$; par suite, gr^2 est constant et l'on a

$$(c)\qquad gr^2 = g'r'^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{g}{g'} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2.$$

4° Loi des hauteurs barométriques. — Pour un corps incompressible, le poids est proportionnel au produit de la gravité g par le volume préalablement ramené à la température de 0°. Or la pression p est le poids d'un volume de mercure égal à H à la température T et par conséquent égal à $\frac{H}{1+MT}$ à la température 0°, en appelant M le coefficient 0,000179 de dilatation du mercure; donc p est proportionnel à $\frac{gH}{1+MT}$; donc on a

$$(d)\qquad \frac{p}{p'} = \frac{H}{H'}\,\frac{g}{g'}\,\frac{1+MT'}{1+MT},$$

Les relations (a), (b), (c), (d) ont été établies en regardant les points M et M′ comme tout à fait quelconques et sans fixer les unités de longueur, de temps et de masse. Or supposons d'abord que le point M′ appartienne à la couche de l'atmosphère qui est en contact avec la Terre et soit dans ce qu'on appelle les *conditions atmosphériques normales*, c'est-à-dire celles pour lesquelles le thermomètre et le baromètre marquent simultanément zéro et $0^{m},76$, nous aurons d'abord $T' = 0$, et, d'après les expériences de Biot,

$$n'^2 - 1 = 0,000588768.$$

Prenons ensuite la longueur du mètre pour unité de longueur, la masse du mètre cube d'air pris dans les conditions atmosphériques normales pour unité de masse; et choisissons enfin l'unité de temps de façon que la durée de l'oscillation du pendule simple dont le fil de suspension a 1^{m} de longueur soit représentée par le nombre ϖ; nous aurons sur-le-champ, en nous rappelant ce qui a été dit plus haut pour la détermination des nombres qui expriment les différents éléments : $H' = 0,76$; r' qui est le nombre de mètres contenus dans le rayon a de la Terre $= 6366738$, $g' = 1$, $\rho' = 1$; quant au nombre p', nous le trouverons en observant qu'il est égal à celui qui représente le poids d'un volume de mercure exprimé par $0,76$ à 0^{o}, ou, d'après les expériences de Regnault, à celui qui représente le poids d'un volume d'air $10517,3$ fois plus grand et pris dans les conditions atmosphériques normales, lequel poids est représenté par 1; donc

$$p' = 0,76 \times 10517,3 = 7993,147.$$

Cela posé, les relations (a), (b), (c), (d) deviendront

$$(1) \qquad n^2 - 1 = 0,000588768.\rho,$$

$$(2) \qquad p = 7993,147\rho(1 + m\mathrm{T}),$$

$$(3) \qquad g = \left(\frac{a}{r}\right)^2,$$

$$(4) \qquad p = 7993,147\,\frac{\mathrm{H}}{0,76}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{1}{1 + \mathrm{MT}},$$

qui permettront d'exprimer quatre des sept éléments de l'atmosphère en fonction des trois autres et d'effectuer, en supposant que le point M soit un point de la trajectoire lumineuse, toutes les transformations que l'on peut faire subir à l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$. Ajoutons, toutefois, que ces transformations nécessiteront encore la connaissance des valeurs des éléments pour l'extrémité B de la trajectoire lumineuse. Or, en supposant que le point M soit un point M_0 d'abord quelconque de la couche qui est en contact avec la surface de la Terre, ce que nous exprimerons en mettant l'indice zéro aux lettres qui expriment numériquement les différents éléments, les équations (1), (2), (3), (4) deviendront

$$
\begin{aligned}
n_0^2 - 1 &= 0,000588768\,\rho_0,\\
p_0 &= 7993,15\,\rho_0(1 + m\mathrm{T}_0),\\
g_0 &= 1,\\
p_0 &= 7993,15\,\frac{\mathrm{H}_0}{0,76}\,\frac{1}{1 + \mathrm{MT}_0},
\end{aligned}
$$

qui déterminent quatre des six nombres n_0, ρ_0, p_0, g_0, T_0, H_0 en fonction des deux autres ; si donc on prend pour M_0 l'extrémité B de la trajectoire lumineuse, on voit que $n_0^2 - 1$, ρ_0, p_0 pourront être considérés comme connus, car, B étant alors le lieu de l'observation, T_0 et H_0 seront donnés à l'aide du thermomètre et du baromètre, au moment de chaque observation.

Nous poserons, pour abréger,

$$
\begin{gathered}
0,000588786\,\frac{\mathrm{H}_0}{76}\,\frac{1}{(1 + \mathrm{MT}_0)(1 + m\mathrm{T}_0)} = 2\alpha,\\
7993,147(1 + m\mathrm{T}_0) = \beta,
\end{gathered}
$$

α et β étant des constantes connues, ce qui nous donnera

$$
n_0 = \sqrt{1 + 2\alpha}, \qquad \frac{p_0}{\rho_0} = \beta;
$$

puis, nous bornant aux relations qui nous seront utiles, nous écrirons

$$n = \sqrt{1 + 2\alpha \frac{\rho}{\rho_0}}, \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1 + mT}{1 + mT_0},$$

ou, plus simplement,

$$n = \sqrt{1 + 2\alpha u}, \qquad v = u \frac{1 + mT}{1 - mT_0},$$

en posant

$$\frac{\rho}{\rho_0} = u, \qquad \frac{p}{p_0} = v.$$

Ces dernières relations nous permettent de donner à l'intégrale $\int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n}$ la forme qui doit en rendre l'évaluation approchée la plus simple possible. Choisissons celle que l'on obtient en exprimant i et n en fonction de u et s, ce qui rendra d'abord nécessaire la connaissance, pour ces deux variables, de leurs valeurs limites, c'est-à-dire des valeurs qui correspondent à la limite inférieure et à la limite supérieure de l'intégrale ou encore à la couche supérieure de l'atmosphère et à la couche qui est en contact avec la Terre. Or, s'il s'agit de $u = \frac{\rho}{\rho_0}$, on trouve immédiatement 0 pour la limite inférieure et 1 pour la limite supérieure; s'il s'agit de s, la relation $\frac{a}{r} = 1 - s$ montre que la limite supérieure est 0 et que la limite inférieure, que nous appellerons S, a pour valeur $1 - \frac{a}{a + D} = \frac{D}{a + D}$, en appelant D la hauteur de l'atmosphère, laquelle hauteur ne dépasse pas 75^{km}, en sorte que

$$\frac{75000}{6366738 + 75000} = \frac{100000}{8588984}$$

est une limite supérieure de S.

Observons maintenant que la valeur de n est fournie par l'équation

$$n = \sqrt{1 + 2\alpha u},$$

qui, différentiée logarithmiquement, donne

$$\frac{dn}{n} = \frac{\alpha\, du}{1 + 2\alpha u};$$

quant à la valeur de tang ι, on la déduit de l'équation

$$nr \sin \iota = n_0 a \sin z_a$$

que nous avons obtenue dans le paragraphe précédent, après une première intégration des équations différentielles de la trajectoire lumineuse. Si l'on y introduit les variables u et s, elle devient

$$\sin \iota = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}}{\sqrt{1 + 2\alpha u}} (1 - s) \sin z_a$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \iota = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}(1 - s) \sin z_a}{\sqrt{1 + 2\alpha u} \sqrt{1 - \frac{(1 + 2\alpha)(1 - s)^2}{1 + 2\alpha u} \sin^2 z_a}},$$

et, en divisant haut et bas par $\cos z_a$, dans le second membre,

$$\operatorname{tang} \iota = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}(1 - s) \operatorname{tang} z_a}{\sqrt{1 + 2\alpha u} \sqrt{1 - \left[1 - \frac{(1 + 2\alpha)(1 - s)^2}{1 + 2\alpha u}\right] \operatorname{tang}^2 z_a}}.$$

Cela étant, on a, pour la réfraction cherchée,

$$\mathrm{R} = \int \operatorname{tang} \iota \frac{dn}{n} = \alpha \sqrt{1 + 2\alpha} \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{1 - s}{(1 + 2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times \left\{ 1 - \left[1 - \frac{(1 + 2\alpha)(1 - s)^2}{1 + 2\alpha u}\right] \operatorname{tang}^2 z_a \right\}^{-\frac{1}{2}} du.$$

Cette valeur de R est exprimée en unités trigonométriques ; si on veut l'avoir exprimée en secondes, il faudra encore la diviser par sin $1''$ ou la multiplier par 206265 et l'on aura finalement

$$R = \alpha\sqrt{1+2\alpha}.206265 \tan z_a \int_0^1 \frac{1-s}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times \left\{1 + \left[1 - \frac{(1+2\alpha)(1-s)^2}{1+2\alpha u}\right]\tan^2 z_a\right\}^{-\frac{1}{2}} du.$$

§ VI. — Démonstration de quelques propriétés qui facilitent la détermination de la réfraction R.

L'intégrale définie à laquelle nous sommes conduits, et où s est une fonction inconnue de u, paraît présenter encore de grandes difficultés; on peut cependant en avoir une valeur aussi approchée que l'on veut pourvu que $\tan z_a$ soit suffisamment petit. Pour le montrer nous établirons d'abord quelques propriétés préliminaires :

Premier lemme. — *On a*

$$u\, ds = -\frac{\beta}{a}\, dv,$$

a et β *ayant la même signification que plus haut.*

En effet, on sait, ou plutôt on suppose, que l'atmosphère est en repos relatif par rapport à la terre sous l'influence de l'attraction de celle-ci, ce qui revient à dire qu'elle est en repos absolu sous l'influence de son poids. Or la condition d'équilibre d'une masse gazeuse, pour laquelle en chaque point M l'unité de surface supporte la pression p et l'unité de volume est soumise à l'influence d'une force extérieure F, s'exprime par la condition

$$\delta p = \mathcal{C}_e \mathrm{F},$$

en représentant par la caractéristique δ les différentielles totales relatives à un déplacement infiniment petit quelconque du point M et par la caractéristique $\mathcal{C}_e$ les travaux élémentaires pour le même déplacement; mais, dans le cas particulier de l'atmosphère, F a pour grandeur le poids de l'unité du volume, c'est-à-dire le produit $g\rho$ de la gravité par la densité et pour direction celle du rayon vecteur r prise en sens contraire, de sorte que $\mathcal{C}_e \mathrm{F} = - g\rho\, dr$: donc la condition d'équilibre devient

$$\delta p = - g\rho\, \delta r,$$

laquelle entraîne comme cas particulier

$$dp = - g\rho\, dr,$$

en désignant toujours par la caractéristique d les différentielles relatives à un déplacement infiniment petit effectué sur la trajectoire lumineuse.

Introduisant dans cette dernière équation u, v, s à la place de ρ, p, r, il vient

$$p_0\, dv = - \frac{g r^2 u \rho_0}{a}\, ds,$$

et, à cause de $gr^2 = a^2$,

$$u\, ds = - \frac{p_0}{\rho_0 a}\, dv$$

ou, d'après ladéfinition de β,

$$u\, ds = - \frac{\beta}{a}\, dv. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La propriété précédente conduit immédiatement à la valeur exacte de l'intégrale définie $\int_0^1 s\, du$

et à une limite supérieure de l'intégrale définie $\int_0^1 s^2\,du$, qui nous seront utiles.

En effet, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 s\,du = (us)_0^1 - \int_S^0 u\,ds = \int_0^1 \frac{\beta}{a}\,dv = \frac{\beta}{a}$$

et

$$\int_0^1 s^2\,du = (us^2)_0^1 - 2\int_S^0 su\,ds = 2\frac{\beta}{a}\int_0^1 s\,dv$$
$$= 2\frac{\beta}{\alpha}\left[(vs)_0^1 - \int_S^0 v\,ds\right] = -2\frac{\beta}{a}\int_S^0 v\,ds;$$

mais la relation $v = u\dfrac{1+mT}{1+mT_0}$ montre que v est toujours plus petit que u, car, la température T s'abaissant à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, on a

$$1 + mT < 1 + mT_0,$$

donc

$$\int_0^S v\,ds < \int_0^S u\,ds = -\frac{\beta}{a}\int_1^0 dv = \frac{\beta}{a},$$

donc

$$\int_0^1 s^2\,du < 2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \int_0^1 s^2\,du = 2\theta\left(\frac{\beta}{a}\right)^2,$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1.

Deuxième lemme. — *L'expression*

$$1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2$$

ou la suivante

$$1 - 2\alpha u - (1+2\alpha)(1-s)^2$$

est toujours positive pour toutes valeurs de s, de 0 à S, et pour les valeurs correspondantes de u.

Puisque v est toujours plus petit que u, il sera établi que

$$1+2\alpha u-(1+2\alpha)(1-s)^2$$

est positif, si nous démontrons qu'il en est ainsi de

$$1+2\alpha v-(1+2\alpha)(1-s)^2.$$

Or cette fonction est nulle pour $s=0$, car alors $v=1$: il suffit donc de faire voir qu'elle est croissante avec s, ou que sa dérivée par rapport à s

$$2\alpha\frac{dv}{ds}+2(1+2\alpha)(1-s) \quad \text{ou} \quad 2(1+2\alpha)(1-s)-2\frac{\alpha}{\beta}au$$

est positive; par conséquent, que l'on a

$$ur<\frac{\beta}{\alpha},$$

ou, en remplaçant α et β par leur valeur,

$$ur.294384\frac{H_0}{0,76}<10^7.799315(1+mT_0)^2(1+MT_0).$$

Mais, dans les applications à l'Astronomie, on suppose toujours

$$0,63<H_0<0,789 \qquad \text{et} \qquad -30<T_0<50,$$

ce qui donne

$$0,82894<\frac{H_0}{0,76}<1,0382,$$
$$0,88987<(1+mT_0)<1,1836,$$
$$0,99463<(1+MT_0)<1,00895,$$

et

$$\bar{1},9185493<\log\frac{H_0}{0,76}<0,01622810,$$
$$\bar{1},9493266<\log(1+mT_0)<0,0732050,$$
$$\bar{1},9976616<\log(1+MT_0)<0,0038696.$$

En remplaçant, dans le premier membre de l'inégalité qu'il s'agit de vérifier, r, u, $\frac{H_0}{0,76}$ par leur valeur maxima, c'est-à-dire r par $a + D = 6441738$, u par 1, $\frac{H}{0,76}$ par $1,0382$, puis, dans le deuxième membre, $1 + mT_0$, $1 + MT_0$ par leur valeur minima, c'est-à-dire $1 + mT_0$ par $0,88987$, et $1 + MT_0$ par $0,99463$, afin de se placer dans le cas le plus défavorable, qui est celui auquel il suffit d'avoir égard, on voit que tout se réduit à vérifier l'inégalité

$$6441738.294384.1,0382 < 10^7.799315.\overline{0,88987}^2.0,99463$$

ou

$$10^2.6,441738.2,9439.1,0382 < 7,99315.\overline{8,8987}^2.9,9463$$

ou, *a fortiori*,

$$10^2.6,4418.2,9439.1,0382 < 7,9931.\overline{8,8987}^2.9.9463.$$

Substituant à cette inégalité, l'inégalité logarithmique correspondante et observant que : 1°

$$\begin{array}{rrl} & l.10^2 &= 2 \\ & l.6,4418 &= 0,8090072 \\ & l.2,9439 &= 0,4689231 \\ & l.1,0382 &= 0,0162810 \\ \hline \text{ce qui donne...} & & \ 3,2942113 \end{array}$$

pour le premier membre de la nouvelle inégalité, et, 2°

$$\begin{array}{rrl} & l.7,9931 &= 0,9027152 \\ & 2l.8,8987 &= 1,8986532 \\ & l.9,9463 &= 0,9976616 \\ \hline \text{ce qui donne...} & & \ 3,7990300 \end{array}$$

pour le second membre, on voit que l'inégalité logarithmique est satisfaite et, par suite, que l'inégalité primitive l'est aussi. (*A suivre.*)