Nouvelles annales de mathématiques

E. Cesàro

Sur quelques fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 29-36
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__29_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. E. CESARO.

Parmi les *Unsolved Questions* de M. Sylvester, publiées en appendice par l'*Educational Times*, nous allons considérer celle qui porte le n° 2906. Il s'agit de chercher la valeur de la fraction continue

$$X = \left(1, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right).$$

Les termes a_n et b_n de la $n^{\text{ième}}$ réduite satisfont à l'équation

$$c_{n+1} = \frac{1}{n} c_n - c_{n-1}, \tag{1}$$

avec la condition initiale $c_1 = 1$, et l'on aura

$$c_n = a_n \quad \text{ou} \quad b_n,$$

suivant que $c_0 = 1$ ou 0.

Cela étant, considérons la fonction

$$y = c_1 x + \tfrac{1}{2} c_2 x^2 + \tfrac{1}{3} c_3 x^3 + \tfrac{1}{4} c_4 x^4 + \ldots. \tag{2}$$

Elle obéit, en vertu de (1), à l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y' = y + c_1 + c_0 x;$$

d'où l'on déduit aisément, par les méthodes habituelles,

$$y = (c_1 - c_0)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right) + c_0 \sqrt{\frac{1-x}{1-x}} \arcsin x. \tag{3}$$

Or, si l'on pose

$$(4)\qquad f(n)=\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

on sait que

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1+x+\frac{x^2+x^3}{f(1)}+\frac{x^4+x^5}{f(2)}+\frac{x^6+x^7}{f(3)}+\ldots,$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\arcsin x=x+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)f(1)+\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)f(2)$$
$$+\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}\right)f(3)+\ldots.$$

Par substitution dans (3) et comparaison avec (2), on trouve

$$c_n=(c_1-c_0)\frac{n}{f\left[\frac{n}{2}\right]}-c_0 f\left[\frac{n}{2}\right].$$

En conséquence, si l'on fait successivement $c_0=1$, $c_0=0$, on obtient

$$a_n=f\left[\frac{n}{2}\right],\qquad b_n=\frac{n}{f\left[\frac{n}{2}\right]};$$

d'où l'on déduit que la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction considérée est

$$(5)\qquad X_n=\frac{1}{n}f^2\left[\frac{n}{2}\right].$$

D'autre part, on sait que l'expression (4) se réduit, pour n très grand, à $\sqrt{\pi n}$, abstraction faite d'un facteur variable, qui tend vers l'unité. On a donc, sensiblement,

$$X_n=\frac{\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right],\qquad\text{d'où}\qquad X=\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on fait usage de la formule de Stirling, on trouve

$$f^2(n)=\pi n+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{8n}-\frac{1}{32n^2}-\ldots\right);$$

puis la formule (5) devient

$$(6)\qquad X_n = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{4n}\left[1 + \frac{(-1)^n}{4n} - \frac{1}{8n^2} + \ldots\right].$$

On peut en déduire un développement analogue pour le n^{ieme} quotient complet Q_n. On a, en effet,

$$Q_n = \frac{X b_{n-1} - a_{n-1}}{a_n - X b_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}\,\frac{X - X_{n-1}}{X_n - X},$$

et, par suite, en vertu de (6),

$$Q_n = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \ldots.$$

On voit que, pour n indéfiniment croissant, la fraction continue

$$Q_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots\right)$$

tend vers l'unité. On résout ainsi la *Question* 2997 de l'*Educational Times*.

En partant de l'identité

$$X = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_4 - X_3) + \ldots,$$

on trouve la formule

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)^2 + \ldots.$$

Si l'on observe que la somme des n premiers termes du second membre est X_{2n-1}, on reconnaît que l'erreur commise en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme est sensiblement $\frac{\pi}{8n}$, pour de très grandes valeurs de n. On peut donc affirmer que la série obtenue est fort peu convergente.

Il est possible d'évaluer, plus généralement, la fraction

$$X(\mu) = \left(1, \frac{\mu}{1}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{3}, \frac{\mu}{4}, \ldots\right),$$

sans passer par le calcul des réduites successives. Remarquons d'abord que les termes de la $n^{\text{ième}}$ réduite satisfont à l'équation

$$(1 - x^2)y' = \mu y + c_1 + c_0 x,$$

la fonction y étant toujours définie par l'égalité (2), où c_n représente indifféremment a_n ou b_n. Si l'on pose

$$\mathrm{J}(x, \mu) = \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{dx}{1-x},$$

on trouve sans peine

$$y = \frac{c_1 - c_0}{\mu}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} - 1\right] + c_0 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \mathrm{J}(x, \mu),$$

et l'on en déduit

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n x^n}{n} &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \mathrm{J}(x, \mu), \\ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n x^n}{n} &= \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} - 1\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces fonctions deviennent infinies pour $x = 1$. La limite de leur rapport, pour $x = 1$, ne diffère donc pas de la limite de $\frac{a_n}{b_n}$, pour n infini. Conséquemment

$$\mathrm{X}(\mu) = \mu \mathrm{J}(1, \mu) = \mu \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{dx}{1-x} = \mu \int_0^1 \frac{x^{\frac{\mu}{2}-1}\, dx}{1+x}.$$

Sous d'autres formes,

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(\mu) &= 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tang} x)^{\mu-1}\, dx \\ &= 2\mu\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+2} + \frac{1}{\mu+4} - \ldots\right). \end{aligned}$$

Quant aux réduites, on calcule d'abord b_n au moyen de (7); puis, si l'on pose

$$\varepsilon_n = 1 - \mu\left(\frac{b_1}{1} - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} - \ldots \pm \frac{b_{n-1}}{n-1}\right),$$

on a

$$J(x, \mu) = \varepsilon_1 x + \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 x^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_3 x^3 + \tfrac{1}{4}\varepsilon_4 x^4 + \ldots,$$

et, par suite,

$$a_n = \varepsilon_n + \mu n\left(\frac{b_1}{1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{n-1} + \frac{b_2}{2}\frac{\varepsilon_{n-2}}{n-2} + \frac{b_3}{3}\frac{\varepsilon_{n-3}}{n-3} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{n-1}\frac{\varepsilon_1}{1}\right).$$

Prenons, comme exemple, le cas de $\mu = 2$. On a

$$\log 4 = (1, \tfrac{2}{1}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{4}, \ldots).$$

Les termes de la $n^{\text{ième}}$ réduite sont

$$a_n = 2n\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{n-1}\right) \mp 1, \qquad b_n = n.$$

En conséquence,

$$X_n = 2\left\{H(n) - H\left[\frac{n}{2}\right]\right\} + \frac{(-1)^n}{n},$$

pourvu que l'on représente par $H(n)$ la somme des n premiers termes de la série harmonique. On en déduit, en vertu de formules connues,

$$X_n = \log 4 + (-1)^n\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{2n^6} - \ldots\right);$$

puis, pour exprimer le $n^{\text{ième}}$ quotient complet,

$$Q^n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{2n^4} + \ldots.$$

On voit que la fraction dont il s'agit est plus convergente que celle de M. Sylvester.

Plus généralement encore, considérons la fraction continue

$$X(\mu, \nu) = \left(1, \frac{\mu}{1+\nu}, \frac{\mu}{2+\nu}, \frac{\mu}{3+\nu}, \frac{\mu}{4+\nu}, \ldots\right).$$

En opérant comme plus haut, on trouve

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n x^{n+\nu}}{n+\nu} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n x^{n+\nu}}{n+\nu} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x^2}.$$

La valeur de $X(\mu, \nu)$ est donc égale au rapport des intégrales

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x}, \quad \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x^2}.$$

Par exemple, si l'on pose

$$S_\nu = \frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2+\nu} + \frac{1}{3+\nu} - \frac{1}{4+\nu} + \ldots,$$

on a

$$X(2, \nu) = \frac{S_\nu}{\frac{1}{2} - \nu S_\nu} = 2 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{3}{2\nu^4} + \ldots.$$

En particulier, lorsque ν est un nombre entier $n-1$, la dernière formule donne l'expression du $n^{\text{ième}}$ quotient complet de la fraction $(1, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots)$, considérée plus haut. Soit encore $\nu = \frac{1}{2}$: on trouve

$$\frac{2\pi}{\pi+2} = \left(1, \frac{4}{1}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \cdots\right);$$

etc., etc.

C'est par des procédés semblables que l'on parvient à calculer la fraction

$$Y(\mu,\nu) = 1 + \cfrac{\frac{\mu}{1+\nu}}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{2+\nu}}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{3+\nu}}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{4+\nu}}{1 + \ldots}}}}$$

On obtient d'abord

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_{n-1}\,x^{n+\nu}}{n+\nu} = \frac{e^{-\mu x}}{(1-x)^{\mu}} \int_0^x x^{\nu}(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_{n-1}\,x^{n+\nu}}{n+\nu} = \frac{e^{-\mu x}}{(1-x)^{\mu}} \int_0^x x^{\nu+1}(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\,dx,$$

et l'on en déduit

$$Y(\mu,\nu) = \frac{\int_0^1 x^{\nu}\,(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\,dx}{\int_0^1 x^{\nu+1}(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\,dx}.$$

Exemples :

$$e - 1 = 1 + \cfrac{\frac{1}{1}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1 + \ldots}}}},$$

d'où

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}};$$

$$\frac{1}{2}(e^2-3)=1+\cfrac{\frac{2}{1}}{1+\cfrac{\frac{2}{2}}{1+\cfrac{\frac{2}{3}}{1+\cfrac{\frac{2}{4}}{1+\cdots}}}},$$

d'où

$$\frac{4}{e^2-5}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{4}{3+\cfrac{6}{4+\cfrac{8}{5+\cdots}}}}$$

Des fractions analogues ont été étudiées par Amoretti, Wronski, Legendre, etc.