Weill

Théorèmes de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 269-272
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__269_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. WEILL.

I. Considérons deux courbes planes C et C′ et un point O; soient M et M′ deux points pris respectivement sur les deux courbes et qui se correspondent de manière que les tangentes en ces points aux deux courbes soient parallèles.

Par le point O, menons une droite égale et parallèle à MM′, l'extrémité μ de cette droite décrit une courbe C″. Je dis d'abord, et c'est là un résultat bien connu, que la tangente à la courbe C″ au point μ est parallèle aux tangentes en M et M′. En effet, en désignant par $x, y, x', y', \alpha, \beta$ les coordonnées de M, M′, μ, l'origine étant en O, on a

$$\alpha = x - x',$$
$$\beta = y - y',$$
$$d\alpha = dx - dx',$$
$$d\beta = dy - dy',$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} = \lambda,$$
$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy - dy'}{dx - dx'} = \lambda.$$

Des mêmes formules, on déduit

$$d\sigma = d\alpha\sqrt{1 + \lambda^2},$$
$$ds = dx\sqrt{1 + \lambda^2},$$
$$ds' = dx'\sqrt{1 + \lambda^2},$$
$$d\sigma = ds - ds'.$$

Il en résulte que l'arc élémentaire de la courbe C″ est égal à la différence des arcs élémentaires correspondants des deux courbes C et C′, et par suite que le rayon de courbure en μ est égal à la somme ou à la différence des rayons de courbure en M et M′. Ce dernier résultat peut s'établir facilement par la Géométrie en remplaçant les trois courbes dans le voisinage des points M, M′ et μ par leurs cercles de courbure, ce qui est permis dans le cas actuel. Au moyen du théorème précédent, on peut construire des courbes dont le périmètre soit égal à la somme ou à la différence des périmètres de deux courbes données ; on peut remarquer, en particulier, que la différence entre les périmètres d'une courbe convexe et de sa parallèle extérieure à une distance l est égale à la circonférence d'un cercle de rayon l.

II. Considérons deux courbes C et C′; en un point M pris sur la première menons à cette courbe une tangente qui rencontre la seconde en M′; en appelant ρ la longueur MM′ et ω l'angle que fait sa direction avec une droite fixe, l'élément de surface compris entre les deux courbes et deux tangentes infiniment voisines a pour expression $\rho^2 d\omega$. Ceci posé, menons par un point O du plan une droite égale et parallèle à MM′, l'extrémité μ de cette droite décrira une courbe C″; l'aire de cette courbe C″ sera, comme on voit, égale à la portion de surface comprise entre les courbes C et C′. De là, des conséquences particulières intéressantes. Considérons, par exemple, un angle droit AMB dont le sommet M décrit une courbe C′ et dont les côtés touchent en A et B une courbe C ; si, par un point O du plan, on mène une droite parallèle à AM et de longueur AB, l'extrémité μ de cette droite décrira une courbe dont l'aire sera double de l'aire comprise entre les deux courbes C et C′.

III. Soit

$$x \cos\omega + y \sin\omega - f(\omega) = 0$$

l'équation d'une tangente à une courbe C, et α, β les coordonnées d'un point P du plan.

La podaire de P par rapport à la courbe C a pour surface

$$\int_0^{2\pi} [\alpha \cos\omega + \beta \sin\omega - f(\omega)]^2 \, d\omega$$

ou bien

$$2\pi \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - 2\alpha \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos\omega \, d\omega$$
$$- 2\beta \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin\omega \, d\omega + \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^2 \, d\omega.$$

Cette formule peut donner lieu à certains problèmes relatifs à l'aire de la podaire. Ainsi, la courbe C étant donnée, le lieu du point P, pour lequel la podaire a une aire donnée, se compose de deux cercles concentriques, résultat connu (*voir* Bertrand, *Traité de Calcul intégral,* p. 365).

Prenons, en particulier, pour $f(\omega)$, la fonction $\sin m\omega$ ou $\cos m\omega$, m étant un entier plus grand que 1, les coefficients de 2α et de 2β sont nuls, et la formule se simplifie.

Pour généraliser la notion de podaire, déterminons, sur chaque tangente à une courbe donnée, un point M par l'intersection de cette tangente et d'une droite, partant d'un point P fixe, et déterminée en même temps que la tangente, l'équation d'une pareille droite sera

$$y - \beta = \varphi(\omega)(x - \alpha).$$

On voit alors immédiatement que le lieu que doit décrire le point P pour que la courbe, lieu des points M correspondants, ait une aire donnée, est une courbe générale du second degré.