NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur l'abaissement des équations réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 251-256
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__251_1>

SUR L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. On sait que, si l'équation $F(x) = 0$ est réciproque et n'admet pas les racines -1 et $+1$, si l'on fait la

substitution

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

l'équation en y ne renferme plus que des puissances paires de y et, en posant $y^2 = z$, la résolution de l'équation $F(x) = 0$ est ramenée à celle d'une équation de degré sous-double. A deux valeurs de x, $x = a$, $x = \frac{1}{a}$, réciproques, correspondent, en effet, des valeurs de y égales et de signes contraires.

Nous allons nous proposer de chercher la forme générale des fonctions rationnelles

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

qui jouissent de la même propriété que la fonction $\frac{1-x}{1+x}$.

Soit

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_p x^p}$$

la fonction cherchée ; on doit avoir

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

et, par suite,

$$\frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{x^{m-p}(B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p)} = -\frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_p x^p}.$$

Pour que l'identité soit possible entre les deux membres, il faut que $m = p$. Par suite,

$$\frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m} = -\frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_0}{B_m x^m + \ldots + B_0}.$$

Pour que ces fractions soient égales, il faut que les termes de même degré des numérateurs et des dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant.

On a donc

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \lambda A_m, \\ A_1 = \lambda A_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ A_m = \lambda A_0, \end{array}\right\} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} B_0 = -\lambda B_m, \\ B_1 = -\lambda B_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ B_m = -\lambda B_0. \end{array}\right.$$

Ces égalités donnent

$$A_0 A_m = \lambda^2 A_0 A_m,$$

d'où

$$\lambda^2 = 1,$$
$$\lambda = \pm 1.$$

Prenons $\lambda = 1$, on aura

$$\begin{array}{ll} A_0 = A_m, & B_0 = -B_m, \\ A_1 = A_{m-1}, & B_1 = -B_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Distinguons les cas de m pair et impair :

Si m est pair et égal à $2n$, le numérateur devient

$$A_0(x^{2n} + 1) + A_1(x^{2n-1} + x) + \dots + A_n x^n,$$

il est réciproque.

Quant au dénominateur, il devient

$$B_0(x^{2n} - 1) + B_1(x^{2n-1} - x) + \dots + B_{n-1}(x^{n+1} - x^{n-1});$$

il renferme le facteur $x^2 - 1$ et peut s'écrire

$$(1 - x^2)\psi_{2n-2}(x),$$

$\psi_{2n-2}(x)$ étant un polynôme réciproque de degré pair ; par suite,

$$y = \frac{\varphi_{2n}(x)}{(1 - x^2)\psi_{2n-2}(x)}$$

ou bien

$$y = \frac{1 + r}{1 - x} \frac{\varphi_{2n}(x)}{(1 + x)^2 \psi_{2n\ 2}(x)}$$

ou enfin

$$y = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

$\varphi_{2n}(x)$ et $\psi_{2n}(x)$ étant des polynômes réciproques de degré pair $2n$.

Si m est impair, $m = 2n+1$; le numérateur devient

$$A_0(x^{2n+1}+1) + A_1(x^{2n}+x) + \ldots + A_n(x^{n+1}+x^{n-1});$$

ce polynôme renferme $x+1$ en facteur; on peut l'écrire

$$(x+1)\varphi_{2n}(x),$$

$\varphi_{2n}(x)$ étant un polynôme de degré pair et réciproque; le dénominateur devient dans ce cas

$$B_0(x^{2n+1}-1) + B_1(x^{2n}-x) + \ldots + B_n(x^{n+1}-x^n).$$

C'est le produit de $1-x$ par un polynôme $\psi_{2n}(x)$ réciproque et de degré pair; on a donc

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)}.$$

La forme trouvée dans le cas de m pair, à savoir

$$y = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

se ramène immédiatement à cette dernière, car on peut l'écrire

$$\frac{1+x}{1-x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)} = \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)};$$

les polynômes $(1+x)^2$, $(1-x)^2$ sont réciproques et de degré pair.

En prenant $\lambda = -1$, on arrive évidemment aux mêmes résultats.

On peut donc dire que la forme la plus générale de la fonction rationnelle qui jouit des mêmes propriétés que la substitution

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

est

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

$\varphi_{2n}(x)$ et $\psi_{2n}(x)$ étant des polynômes réciproques et de degré pair.

2. On sait aussi qu'on ramène la résolution de l'équation réciproque de degré pair à celle d'une équation de degré sous-double, en faisant la substitution

$$z = \Theta\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

la fonction Θ étant symétrique en x et $\frac{1}{x}$ et rationnelle.

Mais une telle fonction est le quotient de deux fonctions entières et symétriques en x et $\frac{1}{x}$; chacune de ces fonctions symétriques est une fonction entière de la somme et du produit des quantités x et $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire une fonction de $x + \frac{1}{x}$ seulement.

La forme générale de la fonction $\Theta\left(x, \frac{1}{x}\right)$ symétrique en x et $\frac{1}{x}$ est donc

$$z = \frac{G\left(x + \frac{1}{x}\right)}{H\left(x + \frac{1}{x}\right)},$$

G et H étant des fonctions entières quelconques. La plus simple de ces substitutions est évidemment celle dont on fait habituellement usage, à savoir

$$z = x + \frac{1}{x}.$$

Dans la question précédente, l'équation en y^2 ayant été obtenue, on l'abaisse au degré sous double en posant $y^2 = z$; or la forme générale de y est

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

d'où

$$z = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \cdot \frac{\varphi_{2n}^2(x)}{\psi_{2n}^2(x)}.$$

Mais la fonction $\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$ peut s'écrire

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{x+\frac{1}{x}-2}{x+\frac{1}{x}+2}.$$

D'autre part, un polynôme $f(x)$ symétrique, de degré 2μ, peut s'écrire

$$f(x) = x^\mu \left[A_0\left(x^\mu + \frac{1}{x^\mu}\right) + \ldots\right],$$

et l'on sait que tous les termes de la forme $x^\mu + \frac{1}{x^\mu}$ sont des fonctions rationnelles de $x + \frac{1}{x}$; la valeur de z peut donc s'écrire

$$z = \frac{x+\frac{1}{x}-2}{x+\frac{1}{x}+2} \cdot \frac{G_1\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H_1\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

Cette forme rentre donc dans la forme

$$z = \frac{G\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

On voit donc que les deux substitutions que l'on emploie dans la résolution des équations réciproques, à savoir $y = \frac{1-x}{1+x}$, $z = y^2$ et $z = x + \frac{1}{x}$, rentrent, ainsi que les formes les plus générales de ces substitutions, dans un type unique

$$z = \frac{G\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

G et H étant des fonctions entières.