Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Sur les séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 243-251

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__243_0>

SUR LES SÉRIES;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Si l'on a une série à termes positifs

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

cette série sera divergente si l'on peut trouver une fonction $\varphi(n)$, telle que $u_n\,\varphi(n)$ ait pour limite une quantité λ différente de zéro, la fonction $\varphi(n)$ remplissant en outre la condition que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit une série divergente.

La série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

sera au contraire convergente, si l'on peut trouver une fonction $\varphi(n)$, telle que $u_n\,\varphi(n)$ ait pour limite une quantité finie λ, et telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit convergente.

Dans le premier cas, $u_n\,\varphi(n)$ peut croître au delà de toute limite; dans le second cas, λ peut avoir pour limite zéro : le théorème est encore vrai; la démonstration que nous allons en donner le montre d'une manière évidente.

2. Supposons d'abord que $u_n\,\varphi(n)$ n'ait pas pour limite zéro, et que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente.

On pourra toujours trouver un nombre μ supérieur à zéro, tel que, pour une certaine valeur de n et pour toute valeur plus grande, $u_n\,\varphi(n)$ soit plus grand que μ;

on aura donc, à partir de cette valeur,

$$\begin{aligned} u_n\,\varphi(n) &> \mu, \\ u_{n+1}\,\varphi(n+1) &> \mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ &\ldots\ldots, \\ u_{n+p}\,\varphi(n+p) &> \mu; \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} & u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} \\ & > \mu\left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+p)}\right]; \end{aligned}$$

la quantité entre parenthèses augmente indéfiniment quand p croît lui-même indéfiniment; par suite,

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

est divergente.

On sait que la série harmonique est divergente; on en conclut que les séries $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$, où le degré du dénominateur ne surpasse pas de plus d'une unité celui du numérateur, sont des séries divergentes; dans ce cas, $\varphi(n) = n$ et $n\frac{f(n)}{F(n)}$, dans les hypothèses faites, est une fonction qui, pour n infini, a pour limite une quantité finie, ou augmente indéfiniment : la série $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$ est donc divergente.

Il en est de même des séries $\sum \frac{1}{(Ln)^{\mu}}$; en posant $u_n = \frac{1}{(Ln)^{\mu}}$, la fonction nu_n croît au delà de toute limite quand n augmente indéfiniment.

3. Supposons maintenant que $u_n\,\varphi(n)$ ait pour limite une quantité finie λ ou bien zéro, mais que $\varphi(n)$ soit une fonction telle que $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit une série convergente; la série proposée $\sum u_n$ sera aussi convergente.

En effet, si $u_n\,\varphi(n)$ a pour limite une quantité λ ou zéro, on pourra toujours trouver une valeur μ supérieure à λ, mais finie, et telle que, pour une valeur de n suffisamment grande, et pour toute valeur plus grande de n, le produit $u_n\,\varphi(n)$ soit inférieur à μ; on aura donc

$$\begin{gathered}
u_n\,\varphi(n) < \mu,\\
u_{n+1}\,\varphi(n+1) < \mu,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_{n+p}\,\varphi(n+p) < \mu;
\end{gathered}$$

on en tire

$$\begin{aligned}
&u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\\
&\quad < \mu\left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+p)}\right].
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est une série convergente, $\sum u_n$ sera donc aussi une série convergente.

On démontre que la série $\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ est convergente pour toute valeur positive de α, quelque petite que soit d'ailleurs la quantité α; par suite, les séries $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$, dans lesquelles le degré du dénominateur surpasse de plus d'une unité celui du numérateur, sont convergentes.

On peut trouver une infinité de fonctions $\varphi(n)$ dont l'ordre de grandeur est compris entre celui de n et celui de $n^{1+\alpha}$, α étant une quantité positive non nulle, et qui jouissent de la propriété de fournir des séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ divergentes ou convergentes.

En prenant pour $\varphi(n)$ les fonctions

$$n\mathrm{L}n, \quad n\mathrm{L}n\mathrm{LL}n, \quad \ldots,$$

les séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ sont divergentes; les fonctions

$$n(\mathrm{L}n)^\mu, \quad n\mathrm{L}n(\mathrm{LL}n)^\mu, \quad \ldots,$$

où $\mu > 1$, donnent, au contraire, des séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ qui sont convergentes.

L'ordre de grandeur de ces fonctions va en se rapprochant de plus en plus; mais Abel a démontré qu'il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ intermédiaire entre elles, et telle que, si $u_n \varphi(n)$ a pour limite zéro, la série $\sum u_n$ soit convergente, et si $u_n \varphi(n)$ n'a pas pour limite zéro, la série $\sum u_n$ soit divergente.

S'il était possible de trouver facilement la limite des produits

$$u_n . n\mathrm{L}n, \quad u_n . n\mathrm{L}n\mathrm{LL}n, \quad \ldots, \quad u_n n(\mathrm{L}n)^\mu, \quad \ldots,$$

on pourrait mettre en évidence la divergence ou la convergence d'un grand nombre de séries à termes positifs; malheureusement cette limite n'est pas, en général, aisée à trouver. Prenons quelques exemples.

4. Soit la série $\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{L}\left[1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right]$, où L désigne un logarithme népérien, et $\varphi(n)$ une fonction qui augmente indéfiniment avec n; nous aurons

$$u_n \varphi(n) = \mathrm{L}\left[1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right]^{\varphi(n)}$$

et, par suite,

$$\lim u_n \varphi(n) = \mathrm{L}e$$

ou

$$\lim u_n \varphi(n) = 1.$$

Si donc la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, la proposée l'est aussi ; si $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est divergente, la proposée est divergente.

Ce qui précède nous permet de trouver les conditions dans lesquelles un produit infini de la forme

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

est convergent ou divergent.

Considérons, à cet effet, la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{L}\left[1+\frac{1}{\varphi(n)}\right],$$

et posons, pour abréger,

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \alpha_n.$$

On aura

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = \mathrm{L}(1+\alpha_0)+\mathrm{L}(1+\alpha_1)+\ldots+\mathrm{L}(1+\alpha_n)$$

ou

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = \mathrm{L}(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n).$$

Mais nous avons vu que le second membre tend vers une limite finie quand n augmente indéfiniment, si la série $\sum \alpha_n$ est convergente ; par suite, le produit

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

tend lui-même vers une limite finie, si la série $\sum \alpha_n$ est convergente. Le logarithme de

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

augmente au contraire au delà de toute limite, si la série $\sum \alpha_n$ est divergente ; on en conclut que le produit

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

augmente aussi indéfiniment ou tend vers zéro, quand la série $\sum \alpha_n$ est divergente; il augmente indéfiniment, si les facteurs sont plus grands que un, et il tend vers zéro si les facteurs sont plus petits que un.

En particulier, le produit

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\cdots$$

a pour limite une quantité différente de zéro, puisque la série

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2}+\cdots$$

est une série convergente.

5. Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Soit

$$u_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1};$$

on peut écrire u_n sous les deux formes suivantes :

$$u_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n+1},$$

$$u_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-2}\right)\frac{1}{2n(2n+1)};$$

par suite,

$$u_n^2=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots$$
$$\times\left[1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right]\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n(2n+1)^2}.$$

Soit Θ_n le produit

$$\Theta_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right],$$

et soit Θ sa limite pour n croissant indéfiniment ; on a

$$u_n^2 = \Theta_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n(2n+1)^2};$$

par suite,

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n}}\sqrt{\Theta_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}$$

et

$$n^{1+\frac{1}{2}}u_n = \frac{n}{(2n+1)\sqrt{2}}\sqrt{\Theta_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)};$$

quand n croît indéfiniment,

$$\lim n^{1+\frac{1}{2}}u_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Theta}{2}}.$$

Le second membre étant fini, et la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$ étant convergente, la proposée est aussi convergente ; l'expression précédente montre, en outre, que les termes de la série se rapprochent indéfiniment de ceux de la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$; la proposée est convergente comme elle.

6. Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^\mu.$$

En posant

$$u_n = \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^\mu,$$

on aura, d'après ce qui précède,

$$u_n = \frac{1}{(\sqrt{2n})^\mu}\sqrt{\Theta_n^\mu\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^\mu}$$

ou bien

$$n^{\frac{\mu}{2}}u_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu}\sqrt{\Theta_n^\mu\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^\mu},$$

et, par suite,

$$\lim n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^{\mu}} \sqrt{\Theta^{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{\Theta}{2}\right)^{\mu}}, \qquad \lim n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \left(\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

On voit que, si $\frac{\mu}{2} > 1$, la série proposée est convergente; si $\frac{\mu}{2} = 1$ ou si $\frac{\mu}{2} < 1$, la série est divergente.

On peut traiter d'une manière analogue les séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\ldots(2\lambda+2n-1)}{(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2n)}\right]^{\mu}$$

et

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{\frac{(2\lambda-\mu)(4\lambda-\mu)\ldots(2n\lambda-\mu)}{(3\lambda-\mu)(5\lambda-\mu)\ldots[(2n-1)\lambda-\mu]}\right\}^{\nu};$$

la première renferme deux paramètres λ et μ, la seconde trois paramètres λ, μ, ν. La première est convergente quand $\frac{\mu}{2} > 1$, la seconde est convergente quand ν est plus grand que deux; dans tous les autres cas, elles sont divergentes; ces séries comprennent un certain nombre de séries bien connues.

7. Soit encore la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}$; on sait que le produit $1.2.3\ldots n$, pour de grandes valeurs de n, peut s'écrire

$$1.2.3\ldots n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n).$$

ε_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, on en déduit

$$\sqrt[n]{1.2.3\ldots n} = n e^{-1} \sqrt[2n]{2\pi n}\, \sqrt[n]{(1-\varepsilon_n)}$$

et, en posant $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}$,

$$n u_n = \frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n}\, \sqrt[n]{(1+\varepsilon_n)}};$$

quand n augmente indéfiniment, nu_n a pour limite e : la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}$ est donc divergente.

8. Considérons la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n x^n}{1.2.3\ldots n}$; posant

$$u_n = \frac{n^n x^n}{1.2.3\ldots n},$$

on a

$$u_n = \frac{n^n x^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)};$$

par suite,

$$u_n = \frac{(ex)^n}{\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)};$$

si $ex > 1$, la série est divergente; si $ex < 1$, elle est convergente; si $ex = 1$, $\lim n^{\frac{1}{2}} u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ étant divergente, la proposée l'est aussi.

9. Considérons enfin la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$; posant $u_n = \sqrt[n]{e} - 1$, le produit $nu_n = n(\sqrt[n]{e} - 1)$ a pour limite l'unité, quand n augmente indéfiniment; par suite, la série, dans ses termes éloignés, devient comparable à la série harmonique : elle est donc divergente.