NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WEILL

Sur une équation différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 204-205

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__204_1>

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. WEILL.

Soit une variable x et une constante k. Posons

$$y = x + \frac{k}{x} \qquad \text{et} \qquad V_p = x^p + \frac{k^p}{x^p}.$$

On aura

$$V_p = y V_{p-1} - k V_{p-2}.$$

Cette relation permet de calculer la fonction V_p, considérée comme un polynôme en y; il est facile de former une équation différentielle du second ordre, à laquelle satisfait cette fonction. On a

$$\frac{dV_p}{dx} = p x^{p-1} - p k^p x^{-p-1},$$

$$\frac{d^2V_p}{dx^2} = p[(p-1)x^{p-2} + k^p(p+1)x^{-p-2}] = \frac{p^2}{x^2}V_p - \frac{1}{x}\frac{dV_p}{dx},$$

$$\frac{dV_p}{dx} = \frac{dV_p}{dy}\left(1 - \frac{k}{x^2}\right),$$

$$\frac{d^2V_p}{dx^2} = \frac{d^2V_p}{dy^2}\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)^2 + \frac{2k}{x^3}\frac{dV_p}{dy};$$

d'où, en désignant par V la fonction de y,

$$\frac{d^2V}{dy^2}(y^2 - 4k) + y\frac{dV}{dy} - p^2V = 0.$$

Cette équation permet de calculer facilement le polynôme V. En faisant $k = 1$, on retrouve des résultats très connus. Le polynôme V_p est égal à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$Z^2 - yZ + k = 0.$$