A. Aubry

Solution d'une question d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 175-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__175_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION D'ALGÈBRE;

PAR M. A. AUBRY,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski).

Étant donnée l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, *trouver les substitutions rationnelles qui reproduisent l'équation.*

On sait que, dans le cas du troisième degré, la transformation rationnelle la plus générale est la transformation entière du second degré. C'est donc parmi les substitutions de ce degré qu'il faut chercher les solutions du problème proposé.

D'abord, quel est le nombre de ces solutions? C'est ce que va nous faire connaître le théorème de Bézout. Effectivement, soit

$$(1) \qquad y = lx^2 + mx + p$$

l'équation qui définit l'une des substitutions demandées; désignons par x_1, x_2, x_3 les trois racines de l'équation proposée

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

par y_1, y_2, y_3 les valeurs correspondantes de y et enfin par s_k la somme des puissances k des racines x_1, x_2, x_3. Les quantités y_1, y_2, y_3 doivent représenter, dans un certain ordre, les quantités x_1, x_2, x_3.

Cela étant, si, dans la relation (1), on remplace x successivement par x_1, x_2, x_3 (et en même temps y par y_1, y_2, y_3) et que l'on fasse la somme des résultats obtenus, on aura

$$s_1 = ls_2 + ms_1 + ps_0. \tag{3}$$

Cette même formule (1) nous fournira par l'élévation au carré

$$y^2 = l'x^4 + m'x^3 + \ldots + p',$$

l', m', ..., p' représentant des fonctions du second degré par rapport aux lettres l, m, p. Nous déduirons de là, comme précédemment,

$$s_2 = l's_4 + m's_3 + \ldots + p's_0. \tag{4}$$

Nous aurons de même par une élévation au cube

$$s_3 = l''s_6 + m''s_5 + \ldots + p''s_0, \tag{5}$$

l'', m'', ..., p'' étant des polynômes entiers du troisième degré des quantités l, m, p.

Les égalités (3), (4) et (5) constituent un système de trois équations à trois inconnues l, m, p dont les degrés respectifs sont 1, 2 et 3 : le nombre des solutions est donc égal à $1.2.3 = 6$.

Il s'agit maintenant de trouver ces solutions. Remarquons, à cet effet, qu'il peut arriver de trois choses l'une : ou bien on n'a, pour aucune valeur de i,

$$x_i = y_i,$$

ou bien

$$x_i = y_i$$

pour une valeur de i seulement, ou

$$x_i = y_i$$

pour les trois valeurs de i.

Examinons successivement chacune de ces hypothèses :

1° On a, par exemple,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2,\\ y_2 &= x_3,\\ y_3 &= x_1; \end{aligned}$$

l, m, p vérifient donc les trois équations du premier degré

$$\begin{aligned} l x_1^2 + m x_1 + p &= x_2,\\ l x_2^2 + m x_2 + p &= x_3,\\ l x_3^2 + m x_3 + p &= x_1, \end{aligned}$$

desquelles nous tirons la valeur de ces inconnues, savoir

$$l = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 & 1 \\ x_3 & x_2 & 1 \\ x_1 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{D},$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & 1 \\ x_2^2 & x_3 & 1 \\ x_3^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix}}{D},$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_2 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 \\ x_3^2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}}{D},$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3).$$

On peut exprimer la valeur de D au moyen des coefficients de l'équation proposée, car le discriminant de elle-ci est

$$D^2 = a^2 b^2 - 4 b^3 - 4 a^3 c - 27 c^2 + 18 abc.$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} l &= \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1}{D} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)}{D}, \\ l &= \frac{a^2 - 3b}{D}; \end{aligned}$$

puis

$$m = \frac{x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3}{D}.$$

Il nous faut calculer la fonction des racines

$$t = x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2,$$

qui est susceptible de deux valeurs. Soit t' la seconde

$$t' = x_1 x_3^2 + x_1 x_1^2 + x_3 x_2^2.$$

On a

$$\begin{aligned} t + t' &= \Sigma x_1 x_3 (x_1 + x_3) = \Sigma x_1 x_3 (-a - x_2) \\ &= -a \Sigma x_1 x_3 - 3 x_1 x_2 x_3, \\ t + t' &= -ab + 3c, \\ t - t' &= x_1 x_3 (x_1 - x_3) + x_2^2 (x_1 - x_3) - x_2 (x_1^2 - x_3) \\ &= (x_1 - x_3)(x_1 x_3 + x_2^2 - x_2 x_1 - x_2 x_3), \\ t - t' &= (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) = -D. \end{aligned}$$

Ces deux relations fournissent les valeurs de t et de t',

$$t = \tfrac{1}{2}(-D - ab + 3c), \qquad t' = \tfrac{1}{2}(D - ab + 3c).$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}
&x_1^3+x_2^3+x_3^3\\
&\quad=3x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-\ldots)\\
&\quad=3x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)\,\mathrm{D}\,l\\
&\quad=-3c-a(a^2-3b).
\end{aligned}$$

Donc

$$m=\frac{\frac{1}{2}(-\mathrm{D}-ab+3c)+3c+a(a^2-3b)}{\mathrm{D}},$$

$$m=\frac{2a^3+9c-7ab-\mathrm{D}}{2\mathrm{D}}.$$

Quant à la valeur de p, c'est

$$\begin{aligned}
p&=\frac{x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}\\
&=\frac{x_1^2x_2(x_1+x_2)+x_2^2x_3(x_2+x_3)+x_3^2x_1(x_3+x_1)-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}\\
&=\frac{x_1^2x_2(-a-x_3)+x_2^2x_3(-a-x_1)+x_3^2x_1(-a-x_2)-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}\\
&=\frac{-a(x_1^2x_2+x_2^2x_3-x_3^2x_1)-x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}},
\end{aligned}$$

$$p=\frac{-at'-ca-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}.$$

Or

$$\Sigma x_2^2x_3^2=(\Sigma x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=b^2-2ac;$$

donc

$$\begin{aligned}
p&=\frac{-at'-ac-2b^2+3ac}{\mathrm{D}}\\
&=\frac{3ac-2b^2-\dfrac{a}{2}(\mathrm{D}-ab+3c)}{\mathrm{D}},
\end{aligned}$$

$$p=\frac{3ac-4b^2+a^2b-a\mathrm{D}}{2\mathrm{D}}.$$

En resumé la substitution

$$y=\frac{2(a^2-3b)x^2+(2a^3-7ab+9c-\mathrm{D})x+(3ac-4b^2+a^2b-a\mathrm{D})}{2\mathrm{D}},$$

où D désigne l'une quelconque des racines carrées de la quantité $D^2 = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$, donne deux solutions de la question.

Exemple. — $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$; on a ici

$$a = -5, \qquad b = 6, \qquad c = -1,$$

$$\begin{aligned} D^2 &= 25 \times 36 - 4 \times 6 \times 36 - 4 \times 125 - 27 + 18 \times 5 \times 6 \\ &= 36 - 4 \times 5(25 - 27) - 27 = 9 + 4 \times 5 \times 2 = 49, \\ D &= \pm 7. \end{aligned}$$

$$a^2 - 3b = 25 - 18 = 7,$$

$$\begin{aligned} 2a^3 - 7ab + 9c &= -2 \times 125 + 7 \times 5 \times 6 - 9 \\ &= -5 \times 2(25 - 21) - 9 = -49 = -7 \times 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3ac - 4b^2 + a^2b &= 15 - 4 \times 36 + 25 \times 6 \\ &= 15 + 6(-24 + 25) = 21 = 3 \times 7. \end{aligned}$$

En prenant $D = +7$, on obtient

$$l = \frac{7}{7} = 1,$$

$$m = \frac{-7 \times 7 - 7}{2 \times 7} = \frac{-7 - 1}{2} = -4.$$

$$p = \frac{3 \times 7 + 5 \times 7}{2 \times 7} = \frac{8}{2} = 4.$$

Donc la substitution $y = (x - 2)^2$ reproduit l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

On peut prendre $D = -7$ et l'on a

$$l = \frac{7}{-7} = -1,$$

$$m = \frac{-7 \times 7 + 7}{-2 \times 7} = 3,$$

$$p = \frac{3 \times 7 - 5 \times 7}{-2 \times 7} = 1.$$

Autre exemple. — $x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$; c'est l'équation qui donne

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{3} = x$$

en fonction de

$$\operatorname{tang} \alpha = \lambda.$$

Il faut faire, dans les formules générales,

$$a = -3\lambda, \qquad b = -3, \qquad c = \lambda.$$

On a alors

$$\begin{aligned} D^2 &= 3 \times 27\lambda^2 + 4 \times 27 + 4 \times 27\lambda^4 - 27\lambda^2 + 18 \times 9\lambda^2 \\ &= 4 \times 27(1 + \lambda^4 + 2\lambda^2) = 4 \times 9 \times 3(1 + \lambda^2)^2, \\ D &= \pm 6(1 + \lambda^2)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$a^2 - 3b = 9\lambda^2 + 9 = 9(1 + \lambda^2),$$

$$2a^3 + 9c - 7ab = -2 \times 27\lambda^3 + 9\lambda - 7 \times 9\lambda = -54\lambda(1 + \lambda^2),$$

$$3ac - 4b^2 + a^2 b = -9\lambda^2 - 4 \times 9 - 3 \times 9\lambda^2 = -36(1 + \lambda^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} l &= \frac{9(1 + \lambda^2)}{6(1 + \lambda^2) \times \varepsilon\sqrt{3}} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1), \\ m &= \frac{-54\lambda(1 + \lambda^2) - 6(1 + \lambda^2)\sqrt{3} \times \varepsilon}{2 \times 6(1 + \lambda^2)\varepsilon\sqrt{3}} \\ &= -\tfrac{1}{2}(1 + 3\varepsilon\sqrt{3}\lambda), \\ p &= \frac{-36(1 + \lambda^2) + 3\lambda \times 6(1 + \lambda^2)\varepsilon\sqrt{3}}{2 \times 6(1 + \lambda^2)\varepsilon\sqrt{3}} = \frac{3\lambda}{2} - \varepsilon\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Au lieu de garder la transformation entière

$$y = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} x^2 - \frac{1 + 3\lambda\varepsilon\sqrt{3}}{2} x + \frac{3\lambda - 2\varepsilon\sqrt{3}}{2},$$

nous allons chercher la transformation homographique équivalente. On atteint ce but, comme l'on sait, par une simple division algébrique. Or on trouve

$$\begin{aligned} & x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda \\ &= \left(\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} x^2 - \frac{1 + 3\lambda\varepsilon\sqrt{3}}{2} x + \frac{3\lambda - 2\varepsilon\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}} x + \frac{2}{3}\right) \\ &\quad - \tfrac{2}{3} x + \tfrac{2}{3}\varepsilon\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = -\frac{-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{3}}{\frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}}x + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}(x - \varepsilon\sqrt{3})}{\frac{2}{3}(x\varepsilon\sqrt{3} + 1)} = \frac{x - \varepsilon\sqrt{3}}{1 + x\varepsilon\sqrt{3}}.$$

On arrive à ce résultat connu, à savoir que, si $x = \operatorname{tang}\varphi$ est une racine, les deux autres sont

$$\frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\frac{\pi}{3}}{1 + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = \operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

et

$$\frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

2° On a

$$y_1 = x_1,$$
$$y_3 = x_2,$$
$$y_2 = x_3;$$

c'est-à-dire

$$lx_1^2 + mx_1 + p = x_1,$$
$$lx_3^2 + mx_3 + p = x_2,$$
$$lx_2^2 + mx_2 + p = x_3.$$

Ces équations nous donnent les valeurs des inconnues

$$l = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2}{-D},$$

$$l = \frac{2x_1(x_3-x_2)-(x_3-x_2)(x_3+x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2)}$$

$$= \frac{2x_1-x_3-x_2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{3x_1-x_1-x_2-x_3}{x_1^2-x_1(x_2+x_3)+x_2x_3}$$

$$= \frac{3x_1+a}{x_1^2+x_1(a+x_1)-\dfrac{c}{x_1}} = \frac{x_1(3x_1+a)}{2x_1^3+ax_1^2-c},$$

$$l = \frac{x_1(3x_1+a)}{-ax_1^2-2bx_1-3c},$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^2 & x_2 & 1 \\ x_2^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{-D} = \frac{x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_3^3-x_2^3-x_1x_3^2-x_1^2x}{-D}$$

$$= \frac{x_1^2(x_2-x_3)+x_1(x_2^2-x_3^2)-(x_2^3-x_3^3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$= \frac{x_1^2+x_1(x_2+x_3)-x_2^2-x_2x_3-x_3^2}{(x_1-x_2)(x_3-x_1)}$$

$$= \frac{x_1(x_1+x_2+x_3)-(x_2+x_3)^2+x_2x_3}{-(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$= \frac{ax_1+(a+x_1)^2+\dfrac{c}{x_1}}{x_1^2+x_1(a+x_1)-\dfrac{c}{x_1}} = \frac{x_1^3+3ax_1^2+a^2x_1+c}{2x_1^3+ax_1^2-c},$$

$$m = \frac{x_1(2ax_1+a^2-b)}{-ax_1^2-2bx_1-3c},$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1 \\ x_3^2 & x_3 & x_2 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{-D} = x_1\frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & x_2 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{-D}$$

$$= \frac{x_1}{-D}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_3^2 & x_3 & x_2-x_3 \\ x_2^2 & x_2 & x_3-x_2 \end{vmatrix} = \frac{x_1(x_3-x_2)}{-D}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_3^2 & x_3 & -1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1(x_3-x_2)}{-D}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2^2+x_2^3 & x_2+x_3 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1(x_3-x_2)}{-D}\left[x_1(x_2+x_3)-x_2^2-x_3^2\right].$$

$$p = \frac{x_1(x_3 - x_2)[x_1(x_2 + x_3) - x_2^2 - x_3^2]}{-(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}$$

$$= \frac{x_1[x_1(-a - x_1) - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2x_3]}{x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3}$$

$$= \frac{x_1\left[-(a + x_1)(a + 2x_1) - \frac{2c}{x_1}\right]}{x_1^2 + x_1(a + x_1) - \frac{c}{x_1}}$$

$$= \frac{-x_1(2x_1^3 + 3ax_1^2 + a^2x_1 + 2c)}{2x_1^3 + ax_1^2 - c}$$

$$= \frac{-(2x_1 + a)(x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c) + 2bx_1^2 + abx_1 + ac}{-ax_1^2 - 2bx_1 - 3c},$$

$$p = \frac{2bx_1^2 + abx_1 + ac}{-ax_1^2 - 2bx_1 - 3c}.$$

En remplaçant x par chacune des trois racines de l'équation donnée, nous obtiendrons trois solutions de la question.

On sait comment on pourrait ramener les expressions précédentes de l, m, p à la forme $\frac{\alpha x_1 + \beta}{\alpha' x_1 + \beta'}$.

On voit facilement comment on pourrait former l'équation du troisième degré dont dépend l'un des coefficients l, m, p et déterminer rationnellement les deux autres en fonction de celui-là. Il faudra en tous cas résoudre une équation du troisième degré qui a le même nombre de racines réelles que la proposée.

3° Si l'on a

$$lx_i^2 + mx_i + p = x_i$$

pour les trois valeurs 1, 2, 3 de l'indice i, on a identiquement

$$lx^2 + mx + p = x,$$

c'est-à-dire

$$l = p = 0, \qquad m = 1.$$

Nous trouvons ainsi la solution $y = x$, qui était à prévoir.

Remarques. — 1. En supposant réels les coefficients de l'équation proposée, quatre des substitutions trouvées sont à coefficients réels. En effet, quand les racines x_1, x_2, x_3 sont réelles, D^2 est négatif, et par suite D imaginaire : les deux solutions trouvées dans le premier cas sont imaginaires et les quatre autres sont réelles; si, au contraire, x seule est réelle, D^2 est positif et les seules solutions imaginaires sont celles du deuxième cas qui correspondent à x_2 et x_3.

2. On pourrait se proposer de généraliser la question et de prendre, au lieu d'une équation du troisième degré, une équation de degré n. Le nombre des solutions serait alors $1.2.3\ldots n$; il est remarquable que ce nombre est précisément le degré de l'équation de la résolution de laquelle Lagrange, cherchant à généraliser ce que l'on connaissait relativement à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, avait fait dépendre celle de l'équation du degré n.

En étendant l'analyse exposée précédemment, on peut d'ailleurs ramener la résolution de cette équation de degré $n!$ à celles de plusieurs équations de degrés moindres et au nombre de n. On est en effet naturellement conduit à distinguer n cas :

1°	on n'a $x_i = y_i$	pour aucune valeur de i	;
2°	on a $y_i = x_i$	pour une seule »	;
3°	» »	pour deux »	;
4°	» »	pour trois »	;
....	....	....	;
$(n-1)$°	»	pour $n-2$ »	;
n°	»	pour $n-1$ et par suite pour n.	

Mettons de côté le $n^{\text{ième}}$ cas, qui comporte évidemment une seule solution $y = x$, et appelons u_n le nombre de solutions qui correspondent au premier. Considérons le $(p+1)^{\text{ième}}$ cas, celui où $x_i = y_i$ pour p valeurs de i;

laissons d'abord fixes ces valeurs de i : nous aurons un nombre de solutions égal à u_{n-p} ; cela est évident d'après la définition même de u_k. Or il y a C_n^p manières de supposer l'égalité $x_i = y_i$ satisfaite pour p valeurs de i ; donc le nombre de solutions afférentes au $(p+1)^{\text{ième}}$ cas est

$$C_n^p u_{n-p}.$$

De plus nous avons, en égalant deux expressions du nombre de solutions

$$u_n + C_n^1 u_{n-1} + \ldots + C_n^p u_{n-p} + \ldots + C_n^{n-2} u_2 + 1 = n!.$$

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n$ dans cette formule, on calculera u_2, puis u_3, u_4, $u_5, \ldots, u_{n-1}$, u_n. Attribuons à n la valeur 2 ; nous trouvons

$$u_2 + 1 = 1.2, \qquad u_2 = 1,$$

ce qui était à prévoir.

Si $n = 3$, on a

$$u_3 + 3u_2 + 1 = 1.2.3, \qquad u_3 = 6 - 3 - 1 = 2,$$

résultat que nous avons effectivement trouvé.

Remplaçons n par 4 et nous trouvons

$$u_4 + 4u_3 + 6u_2 + 1 = 1.2.3.4,$$
$$u_4 = 24 - 8 - 6 - 1 = 9.$$

Ainsi, dans le cas du quatrième degré, la résolution de l'équation du vingt-quatrième degré, qui résout la question posée, se ramène à la résolution de quatre équations dont les degrés respectifs sont

$$u_4 = 9, \qquad 4u_3 = 8, \qquad 6u_2 = 6, \qquad 1.$$

La façon la plus simple de calculer u_n consiste à remarquer que l'on a

$$u_n = n u_{n-1} + (-1)^n.$$

Pour le démontrer, posons $u_k = k!\, v_k$; nous aurons

$$v_n + \frac{C'_n}{n} v_{n-1} + \ldots$$
$$+ \frac{C^p_n}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} v_{n-p} + \ldots + \frac{C^{n-2}_n}{n\ldots 3} v_2 + \frac{1}{n!} = 1,$$

c'est-à-dire

$$v_n + \frac{1}{1!} v_{n-1} + \ldots + \frac{1}{p!} v_{n-p} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-3)!} v_3 + \frac{1}{(n-2)!} v_2 + \frac{1}{n!} = 1.$$

Retranchons de cette égalité celle que l'on obtient en y remplaçant n par $n-1$ et nous verrons que

$$(v_n - v_{n-1}) + \frac{1}{1!}(v_{n-1} - v_{n-2}) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{p!}(v_{n-p} - v_{n-p-1}) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-3)!}(v_3 - v_2) + \frac{1}{(n-2)!} v_2 + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} = 0.$$

La forme de cette relation montre que, si l'on y attribue successivement à n les valeurs $n, n-1, \ldots, 3$, on obtiendra un système de $n-3$ équations linéaires par rapport aux inconnues $v_n - v_{n-1}, \ldots, v_k - v_{k-1}, \ldots, v_3 - v_2$ qui admettra un système unique de solutions. Or, si l'on fait généralement $v_k - v_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k!}$ et $v_2 = \frac{1}{2}$ dans le premier membre de la précédente égalité, le résultat a pour expression

$$\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,1!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!\,p!} + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^3}{(n-3)!\,3!} + \frac{(-1)^2}{(n-2)!\,2!} + \frac{1}{n!} + \frac{(-1)^1}{(n-1)!\,1!}$$
$$= (-1)^n n!\left[1 - C^1_n + \ldots + (-1)^p C^p_n + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-2} C^{n-2}_n + (-1)^n + (-1)^{n-1} C^{n-1}_n\right]$$
$$= (-1)^n n!(1-1)^n = 0.$$

La solution du système en question est donc

$$v_k - v_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k!} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 3).$$

Ainsi, l'on a bien

$$\frac{u_n}{n!} - \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

ce qui équivaut à

$$u_n = n u_{n-1} + (-1)^n.$$

On voit que u_n croît à peu près aussi rapidement que n!

L'expression de u_n en fonction de n s'obtient facilement en employant la relation précédente; on en déduit immédiatement

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{u_2}{2!}$$

ou, puisque $u_2 = 1$,

$$u_n = n! \left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

L'expression entre crochets est le développement de $\frac{1}{e}$, arrêté au $(n+1)^{\text{ième}}$ terme; donc pour $n \geq 3$, $\frac{u_n}{n!}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Observons que l'équation de degré u_n, à laquelle nous sommes arrivé, ne renferme que n coefficients arbitraires, ceux de l'équation proposée de degré n; elle n'est donc pas la plus générale de son degré. Il est visible que si la proposée peut être résolue, elle pourra l'être également et sa résolution dépendra de celle d'une équation de degré n au plus.

A l'égard de l'équation de degré $C_n^{n-p} u_p (p \geq 2)$, nous remarquerons qu'elle peut être résolue si la proposée est aussi résoluble.

De ce qui précède, il ressort que, si l'équation proposée f peut être résolue, il en sera de même de notre résolvante φ du degré $n!$; si l'on peut trouver seulement q racines de f, on en pourra trouver

$$C_q^1 u_{n-1} + C_q^2 u_{n-2} + \ldots + C_q^{q-2} u_{n-q+2} + C_q^{q-1} u_{n-q+1} + u_{n-q}$$

de φ.

Supposons que, réciproquement, l'équation φ soit résoluble, ou même seulement que l'on puisse trouver une racine de l'équation de degré u_n dont il a été parlé. On aura

$$\begin{array}{lll} x_2 = \theta(x_1), & x_3 = \theta(x_2), & \ldots, \\ x_n = \theta(x_{n-1}), & x_1 = \theta(x_n), & \end{array}$$

$\theta(x)$ désignant une fonction rationnelle de x. On en déduira

$$\begin{array}{lll} x_2 = \theta(x_1), & x_3 = \theta[\theta(x_2)] = \theta^2(x_2), & \ldots, \\ x_n = \theta^{n-1}(x_{n-1}), & x_1 = \theta^n(x_n). & \end{array}$$

L'équation f sera abélienne et par conséquent résoluble algébriquement.

Si l'on sait calculer une racine de l'équation de degré $C_n^p u_{n-p}$, $n-p$ racines de l'équation f pourront être exprimées rationnellement à l'aide des p autres et l'on peut affirmer que l'équation f est susceptible d'abaissement.

En résumé, on a ce théorème :

Pour que l'équation $\varphi = 0$ soit résoluble algébriquement, il faut et il suffit que l'équation f soit elle-même résoluble.

On voit maintenant pourquoi, dans le cas du troisième degré, on a dû nécessairement, pour résoudre complètement φ, résoudre d'abord l'équation f (ou une autre tout à fait analogue).