NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

B. NIEWENGLOWSKI

Application d'un théorème de Stewart

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 173-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__173_1>

APPLICATION D'UN THÉORÈME DE STEWART;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, et un quatrième point O, on a, en vertu d'un théorème de Stewart,

$$(1) \qquad \overline{OA}^2.BC + \overline{OB}^2.CA + \overline{OC}^2.AB + AB.BC.CA = 0,$$

pourvu que les segments AB, BC, CA soient comptés avec le signe $+$ dans un sens, avec le signe $-$ en sens contraire.

Posons

$$\overline{OA}^2 = \alpha + R^2, \qquad \overline{OB}^2 = \beta + R^2, \qquad \overline{OC}^2 = \gamma + R^2;$$

en substituant dans l'égalité (1), on obtient immédiatement

$$(2) \qquad \alpha BC + \beta CA + \gamma AB + AB.BC.CA = 0,$$

équation qui fournit une relation entre les puissances de trois points A, B, C situés en ligne droite, par rapport à un cercle quelconque.

Cette équation, conséquence immédiate du théorème de Stewart, permet de faire une discussion très simple de ce problème :

Mener par deux points A, B *une circonférence tangente à une circonférence donnée* O.

Supposons, en effet, le problème résolu, et soit C le point où la tangente commune à la circonférence cherchée et à la circonférence donnée rencontre la droite AB; on a

$$(3) \qquad \gamma = CA.CB.$$

En introduisant cette hypothèse dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\alpha BC + \beta CA = 0$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Cela étant, si le problème est possible, les points A et B sont évidemment tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs au cercle donné O.

Réciproquement, si A et B sont tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs au cercle O, on peut choisir sur AB un point C vérifiant l'équation (4); ce point C sera extérieur au segment AB, puisque les puissances

α et β seront de même signe. Or on aura cette fois

$$\alpha BC + \beta CA = 0;$$

d'où, à cause de l'équation (2), il résulte que

$$\gamma = CA.CB.$$

La puissance du point C par rapport au cercle O sera donc positive; on pourra, par suite, mener de C deux tangentes CT, CT′ au cercle O, T et T′ désignant les points de contact. Les égalités

$$CT^2 = CA.CB, \qquad CT'^2 = CA.CB$$

montrent que les cercles passant par A, B, T et A′, B′, T′ sont tangents au cercle donné.