NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE ROUCHÉ

Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 105-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__105_0>

EDMOND LAGUERRE, SA VIE ET SES TRAVAUX [1];

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Examinateur de sortie à l'École Polytechnique,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

I.

Edmond Laguerre a vécu modeste et tranquille, loin des agitations mondaines, entre ses livres, sa famille et quelques amis dévoués. Ses recherches scientifiques, les exigences du devoir professionnel, son affection pour son aimable compagne, enfin l'éducation de ses deux filles l'ont absorbé pleinement; aucun autre plaisir n'a eu d'attraits pour lui, et, à notre époque de désirs impatients et d'ambition fébrile, Laguerre a su ne puiser ses joies qu'aux sources pures du devoir et du travail.

Né à Bar-le Duc, le 9 avril 1834, il a fait ses études dans divers établissements d'instruction publique, ses parents l'ayant successivement déplacé pour qu'il eût sans cesse auprès de lui un compagnon chargé de veiller sur sa santé déjà précaire. Partout, au collège Stanislas, au lycée de Metz, à l'Institution Barbet, à l'École Polytechnique, il se fit remarquer par sa rare intelligence et par une aptitude singulière pour les langues vivantes et pour les sciences mathématiques. Certes, il n'était pas un de ces élèves qu'aucune étude ne captive au delà de l'heure réglementaire, et qui s'appliquent à toute chose avec une ardeur égale et prudemment contenue. Ses camarades, il faut bien le dire, l'ont vu plus d'une fois plan-

[1] Extrait du *Journal de l'École Polytechnique,* LVI[e] Cahier.

ter là son lavis ou son dessin graphique pour courir après une idée qui hantait son esprit. C'est pourquoi, entré à l'École le quatrième, il n'était classé que le quarante-sixième à la sortie; mais, en revanche, il avait déjà débuté dans la carrière scientifique par un coup de maître, et nous admirions tous cet étonnant garçon qui, étant encore sur les bancs, trouvait la solution complète du problème de la transformation homographique des relations angulaires, solution qui avait échappé à Chasles et à Poncelet et qui comblait une lacune regrettable de la *Géométrie supérieure*. Le bon Terquem entrevit immédiatement toute la portée de ce brillant début. « Profond investigateur en Géométrie et en Analyse », écrivait-il dès lors dans ses *Annales*, « le jeune Laguerre possède un esprit d'abstraction excessivement rare, et l'on ne saurait trop encourager les travaux de cet homme d'avenir. »

Cependant, Laguerre se tut pendant dix ans. Homme de devoir avant tout, son métier d'officier d'artillerie le prit d'abord tout entier, et ses camarades de garnison pourraient dire avec quel zèle il s'appliquait à tous les détails d'un service si peu en harmonie avec ses allures et avec ses goûts. Puis, envoyé à la manufacture d'armes de Mutzig, il put à loisir s'y livrer à ses études favorites; son isolement, comme autrefois le séjour de Poncelet à Saratof, lui fut éminemment favorable, et, en 1864, lors de sa nomination comme répétiteur à l'École Polytechnique, il revint à Paris solidement armé pourreparaître sur l'arène scientifique.

De 1865 à 1886, Laguerre n'a cessé d'émettre des idées originales et profondes sur les diverses branches des Mathématiques pures. Si la variétés des sujets rend ses Mémoires difficiles à classer, la concision avec laquelle il les rédigeait les rend encore plus impropres à l'analyse ;

et, pour mettre son œuvre dans tout son jour, il faudrait en reproduire entièrement la majeure partie. Mais, si nul, mieux que lui, n'a observé les prescriptions de Boileau, nul aussi, il faut le reconnaître, n'a su, en se bornant, mettre dans des écrits plus de précision et de clarté. Que de fois l'ai-je entendu s'élever vivement contre la prolixité de certains auteurs plus sobres d'idées que de mots! « Quand on veut être lu », répétait-il sans cesse, « on ne délaye pas en cent pages un sujet dont le développement en exige à peine dix. » Qu'on me pardonne ces détails; mon esprit est encore plein du souvenir de ces causeries intarissables et charmantes dont nos tournées pour l'admission à l'École Polytechnique nous fournissaient l'heureuse occasion. Déjà liés d'amitié avant notre entrée à l'École, puis associés pendant longtemps à la même besogne, nous avions un profond attachement l'un pour l'autre, et j'ai pu, mieux que personne, je le dis non sans fierté, apprécier son savoir si étendu et sa loyauté si parfaite, constater sa bienveillance inépuisable sous des dehors parfois un peu brusques, et pénétrer les nobles qualités de ce cœur peu prodigue de ses trésors.

II.

L'œuvre de Laguerre se compose de 140 Notes ou Mémoires que l'on peut rattacher à huit chefs principaux :

Emploi des imaginaires en Géométrie;

Application du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie;

Géométrie infinitésimale;

Géométrie de direction;

Méthodes d'approximation pour certaines fonctions analytiques;

Résolution numérique des équations :
Équations différentielles et fonctions elliptiques.

Nous consacrerons un paragraphe à chacune de ces séries de travaux, en suivant l'ordre même que nous venons d'indiquer.

III.

Le premier travail de Laguerre, nous l'avons déjà dit, est relatif à la transformation homographique des relations angulaires.

On sait, depuis Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite à l'infini de ce plan. Laguerre donne à ces points I et J le nom d'*ombilics* du plan; et il appelle *droite isotrope* toute droite menée par un ombilic. Les droites isotropes d'un plan forment deux systèmes distincts : le premier est composé de droites parallèles entre elles, mais passant par I; le second de droites aussi parallèles entre elles, mais passant par J. De chaque point du plan partent deux droites isotropes de systèmes différents et dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Le plan étant réel, toute droite isotrope renferme un point réel, mais un seul : c'est celui où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée.

Cela posé, voici le principe sur lequel repose la solution du problème de la transformation homographique des relations angulaires :

Le rapport anharmonique ρ *du faisceau formé par les deux côtés d'un angle* θ *et par les droites isotropes passant par son sommet est égal à*

$$e^{2\theta i};$$

d'où l'on déduit

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\rho,$$

les logarithmes étant népériens et la lettre i désignant le symbole $\sqrt{-1}$.

D'après cela et en vertu de la projectivité du rapport anharmonique, si plusieurs angles $A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n$, situés dans un même plan, satisfont à une relation d'ailleurs quelconque

$$F(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = 0,$$

les angles correspondants $A'_1, \ldots, A'_k, \ldots, A'_n$ de la figure homographique seront liés par la relation

$$F\left(\frac{1}{2i}\log a_1, \ldots, \frac{1}{2i}\log a_k, \ldots, \frac{1}{2i}\log a_n\right),$$

a_k désignant en général le rapport anharmonique que les deux côtés de l'angle A'_k forment avec les droites qui joignent son sommet aux points qui correspondent aux ombilics de la première figure.

Par exemple, si l'on applique la transformation à ce théorème élémentaire, *la somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux angles droits,* on tombe sur le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale détermine sur les côtés d'un polygone.

Laguerre exposa, quinze ans plus tard, sa doctrine sur l'*emploi des imaginaires en Géométrie* dans un Cours qu'il professa à la salle Gerson et dont il n'a malheureusement publié que quelques Extraits, se contentant d'y puiser, à diverses reprises, le sujet d'importants travaux. Cette doctrine repose, en dernière analyse, sur trois notions fondamentales : la notion de l'angle rattachée, comme nous venons de le dire, à celle du rapport anharmonique, la distinction entre les foyers réels et les foyers singuliers, et enfin une représentation géométrique des points imaginaires situés soit dans un plan, soit dans l'espace. Nous avons développé la première idée; voici quelques explications sur les deux autres.

On nomme, d'après Plücker, foyer d'une courbe plane tout point tel que deux tangentes menées par ce point à la courbe passent respectivement par les ombilics du plan. Si la courbe ne passe pas par les points I et J, on peut mener, par chacun de ces ombilics, un nombre de tangentes égal à la classe μ de la courbe, d'où résultent deux faisceaux dont les intersections sont les μ^2 foyers de cette ligne; μ de ces foyers sont réels et suffisent, d'ailleurs, pour déterminer les autres. Mais, si la courbe passe par I et J, les faisceaux des tangentes menées par ces deux points forment deux groupes; le premier groupe est composé des tangentes dont le point de contact n'est pas un ombilic, et, si k est le nombre des branches de la courbe qui passent par chacun des points I et J, ce premier groupe contient $\mu - 2k$ foyers réels que Laguerre nomme *foyers ordinaires* comme les foyers trouvés dans le cas précédent. Le second groupe, formé par les tangentes ayant leur point de contact en l'un des ombilics sur la droite de l'infini, donne k foyers réels que l'on doit compter comme doubles et que Laguerre nomme *foyers singuliers*. Telle est la distinction entre les foyers ordinaires et les foyers singuliers dont Laguerre a révélé l'importance en montrant combien différents étaient leurs rôles en Geométrie plane et particulièrement dans la théorie des courbes du quatrième ordre qui ont les ombilics pour points doubles, et que M. Moutard, en les considérant à un autre point de vue, avait qualifiées d'*anallagmatiques*.

Quant au mode de représentation géométrique des points imaginaires, il découle immédiatement, pour le plan, de la considération des droites isotropes; il consiste à représenter tout point imaginaire A par le segment aa' que déterminent les deux points réels a et a' situés respectivement sur les deux droites isotropes passant par A. On montre aisément que la position de ce segment représentatif est indépendante du choix des axes de coordonnées, et l'on voit en outre que, lorsque le point A est réel, les points a et a' se confondent avec lui, en sorte que le cas d'un point réel est contenu dans le cas général du point imaginaire. L'étude complète d'une courbe consistera dans la recherche du mode de distribution des segments représentatifs de ces divers points. Ainsi l'on trouve que : *pour qu'un segment* (aa') *représente un point situé sur un cercle réel, il faut et il suffit que les points* a *et* a' *soient réciproques par rapport à ce cercle*, et que, *pour qu'un segment* (aa') *représente un point situé sur une ellipse réelle, il faut et il suffit que les deux points* a *et* a' *appartiennent à une hyperbole homofocale à l'ellipse et que la droite* aa' *soit parallèle à l'une des normales à l'ellipse en l'un des points où cette courbe rencontre l'hyperbole.* Le cas de la droite est le plus important : *Pour que plusieurs segments représentent des points situés sur une même ligne droite, il faut et il suffit que le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités soient semblables et inversement placés.* Laguerre en déduit la solution graphique des problèmes relatifs à la ligne droite déterminée par les segments représentatifs de deux de ses points et donne ainsi le moyen de *réaliser* les constructions où entrent des données imaginaires. Là est en effet le nœud de la question, attendu que certains problèmes, dont la considération des imaginaires donne une solution théorique simple et souvent immédiate, ne sont *résolus effectivement* qu'autant que les constructions auxquelles conduit le mode de démonstration sont *réalisables*.

La représentation géométrique des points imaginaires dans l'espace n'est guère moins simple : mais il faut auparavant définir les plans et les cônes isotropes, ainsi que la conique ombilicale. Si par un point réel ou imaginaire on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point; ces droites sont situées sur un même cône du second degré qu'on nomme *cône isotrope* et que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant le point donné pour centre, en sorte que toute section plane de ce cône est un cercle dont le centre est la projection du sommet du cône sur le plan. Tous les plans isotropes coupent le plan de l'infini suivant un même cercle commun à toutes les sphères de l'espace, et que Laguerre nomme *conique ombilicale*. Par une droite on peut, en général, mener deux plans tangents à l'ombilicale; ce sont des *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes passant par une droite donnée est coupé suivant deux droites isotropes par un plan perpendiculaire à cette droite. Enfin, par une droite isotrope, on ne peut mener qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

Cela posé, soient a un point imaginaire de l'espace et a' son conjugué; ces deux points sont les sommets de deux cônes isotropes qui se coupent suivant un cercle réel A dont le plan est perpendiculaire sur la droite réelle aa', dont le centre est le milieu O du segment aa' et dont le rayon est égal à R, Ri étant l'expression du segment Oa. Il est clair que les deux points imaginaires conjugués, a et a', définissent complètement le cercle A, et réciproquement; c'est ce cercle réel A que Laguerre nomme le *cercle représentatif du couple aa'*. Il est vrai que, dans certaines questions, on peut vouloir distinguer ces deux points l'un de l'autre; il suffit, à cet effet, d'imaginer que le cercle A soit parcouru dans un certain sens; ce sens déterminera celui des deux points dont on veut que le cercle soit la représentation. Pour étudier une courbe donnée par des équations supposées réelles, il suffira d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire le cercle réel A pour que les points imaginaires conjugués a et a', qu'il représente, appartiennent à la courbe. Ainsi, *pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires conjugués situés sur une ellipse réelle, il faut et il suffit que ce cercle appartienne à un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.*

Nous ne pouvons suivre Laguerre dans les déductions si nombreuses qn'il n'a cessé, pendant vingt ans, de tirer de ces principes fondamentaux; pour ne pas dépasser notre but, qui est surtout de mettre en évidence les idées originales de l'auteur, nous nous bornerons à citer les résultats les plus saillants parmi ceux auxquels cette voie l'a conduit.

Ce sont :

1° Des théorèmes généraux sur les courbes algébriques, tels que les deux suivants :

Si, par un point M *pris dans le plan d'une courbe de degré n, on trace un cercle quelconque, de rayon* R, *le produit des distances de ce point aux $2n$ points communs au cercle et à la courbe est égal à la puissance du point* M *par rapport à la courbe, multipliée par le facteur* R^n.

Si, par un point M *pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène des tangentes à la courbe, l'orientation de ces tangentes est la même que celle du faisceau des droites joignant le point* M *aux m foyers de la courbe, et le centre harmonique du point* M *rela-*

tivement aux points de contact est le même que le centre harmonique de ce point relativement aux m foyers.

De ces propriétés métriques découlent de nombreuses conséquences relatives à la courbure des lignes et des surfaces; voici les plus curieuses :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde à trois rebroussements on mène à la courbe la tangente dont le point de contact* T *diffère de* A, *il suffit de prolonger* TA *d'une quantité égale à elle-même pour obtenir le foyer de la parabole qui suroscule en* A *l'hypocycloïde.*

Si d'un point M *d'une conique sphérique on abaisse sur les deux focales réelles des perpendiculaires rencontrant la sphère en m et m', le conjugué harmonique* M, *par rapport à m et à m', appartient au plan osculateur de la courbe en* M. Ce théorème élégant n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une proposition relative à la *biquadratique sphérique*, c'est-à-dire à la ligne d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre.

MT *étant la tangente en un point quelconque* M *d'une surface anallagmatique du quatrième ordre, et* P *et* Q *les deux autres points communs à la droite* MT *et à la surface;* C *désignant en outre le centre de la surface et* I *le milieu de la droite joignant les centres des deux sphères qui, passant par* M, *touchent respectivement la surface en* P *et* Q, *on aura le centre de courbure en* M *de la section normale passant par* MT *en menant par* M *une droite parallèle à* IC, *de même sens et de longueur double.* Pour l'intelligence de ce théorème, nous rappellerons qu'une surface anallagmatique du quatrième ordre peut être considérée de cinq manières différentes, comme l'enveloppe de sphères qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre; les cinq quadriques au moyen desquelles on peut ainsi décrire la surface sont homofocales, et c'est leur centre commun qu'on nomme *centre de la surface anallagmatique*. Ajoutons que, précédemment et presque simultanément, Laguerre et M. Darboux avaient trouvé une autre solution, mais bien moins élégante, du problème de la courbure des surfaces anallagmatiques.

2° Une étude ayant pour objet d'étendre aux courbes sphériques les notions des *foyers ordinaires* et des *foyers singuliers* et de montrer le rôle important que jouent, dans la théorie de la projection stéréographique, les génératrices imaginaires de la sphère.

Lorsqu'on projette stéréographiquement une courbe, *les foyers ordinaires de la courbe se projettent suivant les foyers ordinaires de sa transformée*. Mais il n'en est pas de même pour les foyers singuliers. *Les foyers singuliers de la transformée sont situés sur les polaires, par rapport à la sphère, des droites conjointes du pôle de transformation relativement à la courbe que le plan tangent à ce pôle détermine dans l'une quelconque des surfaces qui, avec la sphère, définissent la courbe.*

3° Des recherches générales sur les surfaces à génératrices circulaires et leur application aux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

Laguerre est revenu plusieurs fois sur la théorie des lignes et des surfaces anallagmatiques. Dans une première Note, il a retrouvé le mode de description donné par M. Moutard pour les anallagmatiques planes considérées comme enveloppes de cercles, en le déduisant de l'existence de quatre cônes qui passent par une biquadratique sphérique; puis, dans deux autres écrits, après avoir démontré, relativement aux surfaces anallagmatiques, plusieurs beaux théorèmes déjà énoncés par M. Moutard, Laguerre a fait connaître les propriétés toutes nouvelles des *focales ordinaires et singulières* de ces surfaces, ainsi que les curieuses relations qui existent entre les quadriques homofocales qui permettent leur génération ; de là résultent diverses propositions sur les surfaces homofocales du second ordre, par exemple la suivante :

Étant donnés deux surfaces homofocales du second degré et un plan arbitraire P, *si l'on prend respectivement sur chacune de ces surfaces un point* m *et un point* m', *tels que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite située dans le plan* P, *toutes les droites telles que* mm' *sont normales à une même surface.*

4° Un Mémoire sur la *cyclide de Dupin*, renfermant beaucoup de propositions nouvelles sur les surfaces de tous les ordres ; nous signalerons spécialement la partie de ce travail qui concerne les *surfaces douées d'un axe de rotation.*

On dit qu'une surface Σ est douée d'un axe de rotation, s'il existe une droite D telle, qu'en faisant tourner Σ autour de D d'un angle arbitraire et désignant par Σ' sa nouvelle position, les surfaces Σ et Σ' se coupent sous un angle constant le long de leur intersection, et cela quel que soit l'angle de rotation. La recherche des surfaces douées d'un axe de rotation est un problème difficile. Laguerre a trouvé d'abord une solution contenant une fonction arbitraire; elle est fournie par des surfaces déjà étudiées par M. O. Bonnet et dont les deux systèmes de lignes de courbure sont composés l'un de cercles, l'autre de courbes sphériques; puis il a trouvé une deuxième solution entièrement distincte de la première et renfermant aussi une fonction arbitraire. La cyclide de Dupin jouit de la singulière propriété d'appartenir à la fois aux deux espèces de surfaces et elle possède quatre axes de rotation, deux de la première espèce, deux de la seconde.

5° Des recherches sur les biquadratiques gauches, c'est-à-dire sur les lignes d'intersection de deux surfaces du second ordre, dont voici le point le plus important :

Étant données une surface du second ordre et deux droites fixes, Chasles avait démontré que, si une droite mobile rencontre les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact était une biquadratique gauche. On pouvait se demander si, inversement, toute biquadratique gauche pouvait résulter d'un tel mode de génération et comment, dans le cas de l'affirmative, on pourrait déterminer la quadrique et les deux droites fixes. En empruntant à Clebsch ses principes sur l'application des fonctions elliptiques à la géométrie des courbes gauches, Laguerre a fait voir que, pour une biquadratique donnée, on peut toujours faire passer six quadriques permettant la génération indiquée par Chasles et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore prendre d'une infinité de manières les deux droites fixes; une circonstance assez remarquable est la rencontre en cette étude des *surfaces quadricuspidales,* déjà étudiées par de la Gournerie, et dont plusieurs belles propriétés ont été ainsi rattachées incidemment à la théorie des intégrales elliptiques.

Laguerre a en outre étendu à ces surfaces un beau théorème qu'il avait donné sur les surfaces du second ordre : *Si, par une ligne de courbure quelconque* K *d'une quadrique* A, *on mène une autre quadrique* A', *la surface développable circonscrite à* A *et* A' *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure*; de même, *si, par la biquadratique* K, *on mène une quadricuspidale quelconque* A″, *la développable circonscrite à* A *et* A″ *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*

6° Une étude pleine d'intérêt sur les lignes que Laguerre a nommées *cassiniennes*. Ces courbes, dont le type est l'ellipse de Cassini, sont les anallagmatiques planes ou sphériques jouissant de cette propriété que l'on peut circonscrire à la conique qui les définit un quadrilatère inscrit dans le cercle directeur correspondant. Laguerre a fait connaître pour ces lignes plusieurs modes de génération fort élégants; par exemple :

Si une biquadratique sphérique est telle qu'une droite passant par deux points de cette courbe ait pour polaire, relativement à la sphère sur laquelle elle est tracée, une droite rencontrant la courbe en deux points, cette ligne est une cassinienne.

Si une droite s'appuie sur les droites fixes en restant tangente à une sphère, cette courbe de contact est une cassinienne.

Il a, de plus, indiqué une manière d'associer deux à deux les points d'une cassinienne qui facilite extrêmement l'étude de la courbe et conduit à des propriétés fort remarquables :

Si l'on prend le conjugué harmonique d'un point fixe quelconque de la sphère relativement à chacun des couples de points associés d'une cassinienne, le lieu de ces points conjugués est un cercle.

Si a *et* b, c *et* d *sont les points diamétralement opposés à deux couples quelconques* A *et* B, C *et* D *de points associés d'une cassinienne, et si* M *désigne un point quelconque de la courbe, la différence des aires des triangles sphériques* M*ab*, M*cd reste constante.*

7° Laguerre retrouve les cassiniennes en partant d'un point de vue tout autre dans un Mémoire *Sur quelques propriétés des foyers des courbes algébriques et des focales des cônes algébriques.*

La proposition fondamentale, dans ces nouvelles recherches, est la suivante :

La polaire d'un point quelconque M *du plan d'une courbe de $m^{ième}$ classe, par rapport aux droites obtenues en menant par chacun des m foyers réels une perpendiculaire sur la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point* M *par rapport aux normales à la courbe, qui ont pour pieds les points de contact des tangentes issues du point* M.

Après avoir déduit de là ce beau théorème de Liouville : *Si, aux points de rencontre d'un cercle et d'une courbe plane, on mène les normales à la courbe, la polaire du centre du cercle par rapport à ces normales est située à l'infini.* Laguerre en fait l'application aux coniques homofocales, ce qui le conduit à cette proposition remarquable :

Si l'on abaisse d'un point des normales à l'une quelconque des coniques ayant pour foyers deux points donnés F *et* F′, *les tangentes menées aux pieds des normales forment un quadrilatère complet, dont les six sommets sont trois couples de points associés d'une cassinienne cubique, que ces sommets décrivent lorsque la conique varie. Ces tangentes roulent en même temps sur une parabole dont le foyer est le conjugué harmonique du point* M *par rapport à* F *et à* F′.

L'auteur étend ensuite aux cônes algébriques les propriétés qui précèdent et déduit de là le moyen de construire, relativement à une arête donnée, l'axe de courbure et même l'accélération de courbure d'un cône du second ordre dont on connaît les focales.

8° Un Mémoire *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés.*

Cette courbe, du quatrième degré et de la troisième classe, doublement tangente à la droite de l'infini, renferme dans son équation six constantes arbitraires, et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de manières comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Laguerre se propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui donnent lieu au mode de génération indiqué. La solution repose sur cette propriété curieuse :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné ABCD *est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé, c'est-à-dire au quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC, BCD, CDA, DAB.

Parmi les théorèmes qu'il en déduit, nous remarquerons le suivant :

Les asymptotes des coniques passant par les sommets d'un triangle et par le point de concours des hauteurs enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la ligne symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

Étendant ensuite ses recherches à la géométrie à trois dimensions, l'auteur étudie la distribution dans l'espace des axes des quadriques de révolution, passant par quatre ou cinq points donnés; il démontre en particulier cette proposition :

Cinq points étant donnés sur une quadrique de révolution, les centres des cinq sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former en groupant ces points quatre à quatre sont situés sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.

Il montre enfin que la plupart des résultats obtenus ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus généraux, relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

Ces *lignes spiriques,* dont il avait signalé dans un travail antérieur une série de propriétés, sont des anallagmatiques planes du quatrième ordre, possédant un axe de symétrie. Une telle courbe a deux foyers singuliers situés sur l'axe de symétrie : si ces foyers coïncident, elle devient un ovale de Descartes; si l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, elle s'abaisse au troisième degré; enfin, elle se réduit à une conique, si les deux foyers singuliers passent à l'infini. Nous citerons seulement, parmi les propriétés que Laguerre a fait connaître, celle qu'il considérait comme fondamentale :

Si l'on joint un point mobile sur une spirique à deux points fixes de la courbe, les perpendiculaires élevées sur les milieux des deux cordes ainsi obtenues tracent sur l'axe de symétrie deux divisions homographiques ayant pour points doubles les foyers singuliers de la courbe ; d'où l'on déduit aisément que, *un quadrangle* *étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers de la courbe appartiennent à une même conique.*

9° A cette étude sur la spirique se rattache une monographie intéressante sur la *cardioïde*, renfermant beaucoup de propriétés nouvelles.

La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon. Elle dérive de la spirique générale, lorsque les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et que les deux foyers singuliers se confondent en un seul F. La division homographique dont nous avons parlé à la fin de l'alinéa précédent a ses deux points doubles réunis en F, et l'on obtient ce théorème :

Si l'on joint un point mobile de la cardioïde à deux points fixes de la courbe, et qu'on nomme I *et* K *les points où l'axe de symétrie rencontre les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes ainsi obtenues, la différence*

$$\frac{1}{\mathrm{FI}} - \frac{1}{\mathrm{FX}}$$

reste constante.

D'autres propriétés résultent d'ailleurs de l'application à la cardioïde des théorèmes généraux que nous avons énoncés ci-dessus (1°). De la combinaison des deux points de vue résulte une théorie simple et élégante de cette courbe qui rentre d'ailleurs dans le groupe des unicursales de troisième classe, dont Laguerre a donné un mode de génération digne d'être remarqué :

Une courbe de troisième classe est unicursale, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées *à la courbe par chacun de ses points, soient à angle droit. Le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.*

10° Citons enfin deux Notes auxquelles Laguerre attachait quelque prix et qui ont pour objet *la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle ou à un quadrilatère, et les éléments d'une conique inscrite dans le même polygone.*

Poncelet a montré que, si un triangle est à la fois inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique, on peut inscrire et circonscrire à ces deux courbes une infinité de triangles. Mais quelle relation doit-il exister dans ce cas entre les éléments de la conique et du cercle? Telle est la question que Laguerre s'est posée, et voici la solution qu'il a donnée : F et G étant les deux foyers de la conique, O le centre du cercle, F′ et G′ les points réciproques de F et G relativement au cercle, si l'on mène, par F, la parallèle à OG jusqu'à sa rencontre R avec GF′, la longueur de l'axe focal est moyenne proportionnelle entre GR et GF′.

Dans le cas du quadrilatère, D étant le point de rencontre de FG′ et GF′, si l'on mène par F la parallèle à OD jusqu'à sa rencontre R avec GF′, la longueur de l'axe focal est moyenne proportionnelle entre GR et GF′.

IV.

Passons maintenant à l'application du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie.

En développant la belle interprétation géométrique, donnée par Jacobi, de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où f désigne un polynôme du quatrième degré, Laguerre a été conduit à donner à l'intégrale une forme remarquable par sa simplicité :

Si l'on décompose, d'une façon quelconque, le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré $\theta(x)$ et $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)} = C(x-y),$$

C *désignant une constante arbitraire.*

Parmi les propriétés des cubiques gauches et des cônes du second degré, que Laguerre a rattachées à cette intégration, nous appellerons surtout l'attention sur une construction géométrique fort ingénieuse et relative à l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce ; cette construction repose sur le théorème suivant :

Étant donnés sur une cubique gauche six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V = 0$, *si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux plans tangents à ce cône, on aura les deux relations*

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

où x_0, y_0, z_0 *désignent les paramètres des points où le premier plan coupe la cubique et* x_1, y_1, z_1 *les paramètres des points où la cubique est rencontrée par le second plan.*

On remarquera l'analogie de ces résultats avec ceux donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques : Jacobi obtenait la construction de l'addition des fonctions elliptiques en faisant rouler une droite sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes dont la position détermine un polynôme du quatrième degré ; Laguerre effectue géométriquement la construction des fonctions ultra-elliptiques de première espèce en faisant rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second degré qui passent par six points fixes dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynôme du sixième degré.

C'est au lien intime qui existe entre la décomposition en trois carrés du polynôme du sixième degré et le problème relatif à la construction des cônes du second degré qui passent par six points de l'espace, qu'est due ici l'introduction, à côté du Calcul intégral, de la théorie des formes algébriques.

Voici maintenant des recherches géométriques où cette dernière théorie intervient d'une manière exclusive et plus complète. Ces recherches concernent successivement les lignes planes, les surfaces réglées du second ordre, et enfin la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.

Considérons d'abord les lignes planes.

Une première étude est fondée sur la considération de l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à une courbe de classe n dont on a l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$. Laguerre donne à l'équation $U = 0$, qui est du degré n et dont les coefficients sont des polynômes entiers en x et y, le nom d'*équation mixte* de la courbe, et il indique le moyen de former les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les covariants de $F(u, v, w)$, ce qui le conduit, en particulier, à une méthode simple pour trouver l'équation de la cayleyenne d'une courbe algébrique.

L'équation mixte joue un rôle considérable dans l'étude des singularités des courbes planes de quatrième classe; on sait qu'une telle courbe K possède 28 points doubles δ et 24 points de rebroussement ρ; il existe en outre dans son plan 21 droites P, telles que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p et une conique résiduelle; aux 21 droites P correspondent 21 points p, et les 73 points δ, ρ, p sont les points communs à trois courbes dont les équations s'expriment simplement en fonction de

$$\frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y},$$

S et T désignant l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme $U(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, constitue l'équation mixte de la courbe K. Soient K et K′ deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe, ayant pour équations mixtes $U = 0$ et $U' = 0$, on dit que les faisceaux de droites dont ces équations donnent les coefficients angulaires sont harmoniques lorsque l'invariant quadratique I des deux formes U et U′ est égal à zéro; le lieu des points d'où l'on voit les courbes K et K′ sous deux faisceaux harmoniques est, d'après cela, une courbe $I = 0$ de degré n; Laguerre lui donne le nom de *courbe harmonique* du couple K et K′; si n est impair, cette ligne est également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau que K et K′ déterminent, et elle prend alors le nom de *courbe harmonique* de ce faisceau. On déduit de là plusieurs propositions remarquables :

Si l'on considère les différentes droites que l'on peut *mener par un point* M *et si l'on prend leurs premières polaires par rapport à une courbe* K *de quatrième classe, ces polaires forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la courbe harmonique est la droite polaire du point* M *par rapport à la courbe du quatrième ordre* Σ *qui passe par les* 24 *points de rebroussement de* K. En particulier, *les* 21 *droites* P *sont les droites polaires relativement à* Σ *des* 21 *points p.*

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

Laguerre donne en outre la *condition pour que les* 28 *points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre.*

Ajoutons, pour achever de montrer l'importance de l'*équation mixte* dans la théorie des courbes, que Laguerre en déduit, pour l'hypocycloïde à trois points de rebroussement, un nombre très considérable de propriétés nouvelles, parmi lesquelles nous énoncerons seulement les deux suivantes :

P *et* Q *étant les points où une droite* D, *tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements, coupe cette courbe, si le sommet d'un angle de grandeur constante décrit la droite* D, *tandis que l'un des côtés reste tangent à la courbe, l'autre côté de l'angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à* D *et passant par les points* P *et* Q.

M *étant un point mobile sur une ellipse* E *qui passe par un point fixe* A *et qui se projette sur un plan* P *suivant un cercle, le plan perpendiculaire sur le milieu de la corde* AM *coupe le plan* P *suivant une droite qui enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Si le point* A *se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde se* *déplace dans le plan* P *en restant égale à elle-même. Les traces, sur le plan* P, *des plans normaux à l'ellipse enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement, et les deux tangentes doubles de rebroussement de cette courbe sont le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse.*

Il faut encore rattacher à ces études deux Mémoires : l'un *Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion,* l'autre *Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes.*

La courbe K du quatrième degré, étudiée dans le premier de ces Mémoires, jouit de nombreuses propriétés qui prennent surtout une forme simple dans le cas particulier où deux des points doubles d'inflexion sont les ombilics du plan ; la courbe est alors le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes, c'est-à-dire la *lemniscate* de Bernoulli. Sans entrer dans les détails de cette monographie si bien faite, nous indiquerons seulement les propriétés fondamentales de la courbe K.

La cubique polaire d'un point M *de la courbe se décompose en une droite,* qu'on appelle la droite harmonique du point M, *et en une conique qui passe par les trois points doubles et touche la courbe au point* M.

Si d'un point M *de la courbe on mène les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont sur la droite harmonique de* M.

Les six pôles d'une droite par rapport à la courbe sont les sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des points où la droite considérée rencontre la courbe.

La développée d'une conique ayant trois tangentes doubles, sa corrélative rentre dans l'espèce étudiée. Les propriétés obtenues peuvent donc être regardées comme des propriétés relatives aux développées des coniques. Nous citerons seulement celle-ci :

Si l'on considère les quatre points où une tangente quelconque à la développée K *d'une ellipse coupe cette courbe* K, *les tangentes menées en ces points à cette développée concourent en un même point.*

Le dernier Mémoire a un caractère plus général. Il a pour objet l'étude du réseau des courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre que représente, lorsqu'on fait varier les paramètres ξ et η, l'équation

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

dans laquelle A, B, C désignent trois polynômes du $n^{\text{ième}}$ degré en x et y, liés d'ailleurs par la relation

$$Ax + By + C = 0.$$

Par deux points quelconques du plan passe une courbe du réseau. Une telle courbe est déterminée par les valeurs de ξ et η; elle passe d'ailleurs par le point qui a pour coordonnées ξ et η et qui prend le nom de *point principal.* Cela posé, on a les propositions suivantes :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ *points fixes ou pivots. Deux courbes quelconques du réseau ont en commun, outre les pivots,* $n - 1$ *points, qui sont situés en ligne droite, et le* $n^{\text{ième}}$ *point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.*

Les courbes du réseau, qui ont pour points principaux les points d'une droite, ont en commun $n - 1$ *points situés sur cette droite et qu'on nomme* points centraux de la droite. *Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau, ayant ce point fixe pour point principal.*

Si, par chaque point du plan, on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal, les tangentes dont le point de contact est distinct de M : 1° *toutes ces droites enveloppent une courbe* K *de la classe* $(n^2 - n + 1)$, *et du degré* $3(n-1)$ *qui est le lieu des points principaux des courbes du réseau ayant un point double;* 2° *les points de contact de toutes ces tangentes appartiennent à une courbe* H, *qui est le lieu des points doubles du réseau.*

Si deux courbes de degré n ont $n-1$ *points communs en ligne droite, leurs* $n^2 - n + 1$ *autres points communs sont les pivots d'un réseau de l'espèce considérée.* En particulier, *les courbes du troisième degré passant par sept points fixes forment un réseau de cette espèce;* c'est des propriétés de ce réseau spécial que M. Aronhold a déduit sa belle *construction de la courbe du quatrième ordre ayant pour tangentes doubles sept droites données.*

Si des seize points communs à deux courbes du quatrième ordre trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points communs se rencontrent en trois nouveaux points situés en ligne droite.

Considérons maintenant les courbes tracées sur une surface du second ordre S.

La surface S possède un double système de génératrices rectilignes; pour la commodité du langage, on nommera *directrices* les génératrices d'un système en conservant le nom de *génératrices* à celles du système opposé. Soit enfin K une conique prise arbitrairement sur la surface et qu'on appellera *conique fondamentale :* les points de cette conique répondent respectivement aux valeurs successives d'un paramètre variable. Par chaque point M de la surface S passe une directrice coupant la conique fondamentale en un seul point dont le paramètre sera désigné par x; de même par le point M passera une génératrice coupant la conique K en un seul point dont le paramètre sera désigné par y. Laguerre prend les quantités x et y comme les coordonnées du point M, en sorte que l'équation $f(x, y) = 0$, d'une courbe tracée sur la quadrique S, indique, par son degré p par rapport à x, en combien de points la courbe coupe une génératrice quelconque, et par son degré q, par rapport à y, en combien de points la courbe rencontre l'une quelconque des directrices. Après avoir rendu cette équation homogène en remplaçant x et y par $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$, il parvient, par la considération des émanants d'une forme binaire, à montrer qu'on obtient cette équation en égalant à zéro un polynôme ordonné suivant la puissance de $xy' - yx'$ et qui est un covariant double de certains polynômes U, V, W, ... entiers en x et x' et de degrés $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ... L'étude de la courbe considérée se trouve ainsi rattachée à l'étude simultanée de ces formes; on pourra toujours, dans un calcul relatif à un système de courbes, faire en sorte qu'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques du système des courbes, ou pour simplifier les opérations. Suivant le choix de la conique fondamentale, l'équation d'une courbe donnée varie, et l'art consiste à obtenir l'équation qui renferme le moins de formes possible. Ainsi, l'équation des cubiques gauches peut, d'une infinité de manières, être ramenée à ne contenir qu'une forme binaire cubique; celle de la biquadratique (intersection de la surface S et d'une autre quadrique n'ayant aucune génératrice commune avec la première) peut être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un seul polynôme du quatrième degré; enfin, pour la quartique gauche (courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second degré), on peut, mais d'une seule manière, ramener son équation à ne renfermer qu'une seule forme biquadratique.

La surface réciproque de celle de Steiner est la surface S du troisième degré qui contient les six arêtes d'un tétraèdre. On voit, en effet, immédiatement que sa réciproque, c'est-à-dire le lieu des pôles de ses plans tangents, par rapport à une quadrique, est une surface S' du quatrième ordre jouissant de la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, c'est-à-dire la surface qu'on nomme habituellement *surface de Steiner*. Laguerre a consacré à la surface S deux beaux Mémoires, l'un d'Analyse, l'autre de Géométrie. Le premier a pour point de départ les considérations suivantes : Si l'on désigne par a, b, c, d, e des fonctions linéaires des coordonnées x, y, z, u, l'équation

$$U \equiv (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu) = 0$$

représente un plan mobile enveloppant la surface développable

$$I^3 - 27 J^2 = 0,$$

où I et J représentent l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme U; les polynômes a, b, c, d, e sont d'ailleurs reliés par une relation linéaire et homogène dont Laguerre rattache habilement les coefficients numériques à une autre forme binaire. L'équation $J = 0$ représente précisément la surface du troisième ordre S réciproque de celle de Steiner, et l'on voit ainsi que l'étude de cette surface se ramène à la théorie de deux formes biquadratiques simultanées dont l'invariant quadratique est nul. En particulier, comme la quadrique $I = 0$ coupe évidemment la surface S suivant une de ses lignes asymptotiques, on voit que la recherche du système complet de ces courbes, dont la découverte appartient d'ailleurs à Clebsch, revient à la solution du problème suivant : *En donnant aux polynômes* a, b, c, d, e *toutes les valeurs telles que* J *conserve la même forme, quelles sont les valeurs que peut prendre l'invariant* I? Laguerre résout ce problème et donne en outre un très grand nombre de propriétés nouvelles de la surface et des courbes gauches qui s'y rattachent; comme il faut se borner, nous mentionnerons seulement la propriété suivante, à cause de sa simplicité :

Si, par un point de la surface S, *on mène le cône circonscrit à cette surface, ce cône se décompose en deux cônes du second degré; chacun d'eux touche la surface suivant une cubique gauche, et les surfaces développables ayant ces cubiques pour arêtes de rebroussement coupent la surface* S *suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

Quant au Mémoire de Géométrie pure que Laguerre a écrit sur le même sujet, il a pour point de départ un mode particulier de représentation de la surface S sur un plan; de ce mode résultent la plupart des théorèmes auxquels l'auteur avait déjà été conduit par l'analyse ci-dessus, ainsi que d'autres propositions, par exemple :

Si les trois faces d'un trièdre touchent la surface S *en trois points situés en ligne droite, parmi les neuf points où les arêtes du trièdre rencontrent la surface, il en est trois qui sont situés sur une même ligne asymptotique.*

Pour achever le compte rendu de la partie de l'œuvre de Laguerre qui est relative à la Géométrie analytique, il nous reste à parler des travaux sur les normales aux courbes et aux surfaces du second ordre.

On aperçoit de suite comment la théorie des formes s'introduit naturellement dans cette étude. En général, trois droites passant par un même point M ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données; $u = 0$ étant l'équation du troisième degré qui détermine les directions des axes et celle de la droite qui joint leur intersection au point M, et $u' = 0$ étant l'équation qui détermine les directions des trois droites issues du point M, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à la conique ayant pour axes les deux droites données est $\Delta = 0$; Δ désigne l'invariant des formes cubiques u et u', invariant qui s'offre d'ailleurs dans beaucoup d'autres questions de Géométrie, notamment dans la théorie des cubiques gauches.

Après avoir retrouvé par une voie nouvelle les résultats si élégants de Joachimstahl sur les normales aux coniques et aux quadriques, Laguerre obtient une série de propriétés nouvelles parmi lesquelles nous citerons, d'abord relativement aux coniques, les théorèmes suivants :

Si l'on joint un point quelconque M *au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette courbe, les trois droites ainsi obtenues sont telles que la conjuguée harmonique de chacune* *d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point* M *à la conique.*

U *étant la forme du quatrième degré qui, égalée à zéro, détermine les directions des normales menées du point* M *à une conique, et* **H** *et* **S** *étant le hessien et l'invariant quadratique de cette forme, l'équation*

$$U + \sqrt{\frac{S}{3}}\,H = 0$$

détermine les directions des droites joignant le point M *aux centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les pieds des quatre normales pris trois à trois.*

Puis, sur les surfaces du second ordre, outre la généralisation du premier des deux théorèmes qui précèdent, les propositions que voici :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales abaissées d'un point M *sur une quadrique est le milieu du segment qui sépare le point* M *du point dont la projection sur les axes de la quadrique sont les intersections de ces axes avec le plan des deux autres normales.*

Les pieds des six normales que l'on peut abaisser d'un point M *sur une quadrique, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, appartiennent à une même cubique gauche; et, si, par le point* O, *on mène un plan parallèle à deux quelconques des normales, ce plan coupe les cubiques en deux points situés sur la sphère qui contient les pieds des quatre autres normales.*

Mentionnons enfin le problème suivant qui a quatre solutions et que Laguerre résout à l'aide de la règle et du compas : *Déterminer toutes les coniques qui, passant* *par un point donné, sont normales à quatre droites concourantes.*

V.

C'est un théorème de M. Bertrand qui a provoqué les premières études de M. Laguerre sur la Géométrie infinitésimale.

M. Bertrand avait démontré depuis longtemps que les normales principales d'une courbe gauche ne peuvent être les normales principales d'une autre courbe, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la ligne donnée. Laguerre a fait voir que, si une surface réglée est applicable sur un hyperboloïde de révolution, sa ligne de striction est une des courbes étudiées par M. Bertrand, et que, réciproquement, on peut toujours considérer une telle courbe comme la ligne de striction d'une surface réglée applicable sur un hyperboloïde de révolution.

Nous ne pouvons citer tous les résultats, souvent utilisés depuis, dont Laguerre a enrichi cette branche des sciences mathématiques. Nous devons surtout attirer l'attention sur l'introduction en Géométrie infinitésimale d'un élément nouveau, qui semble appelé à jouer un rôle important dans la Géométrie des lignes tracées sur les surfaces, si l'on en juge du moins par l'heureux parti que l'auteur en a tiré pour la solution de plusieurs problèmes difficiles :

Que l'on imagine en chaque point d'une courbe gauche un segment normal dont la longueur et la direction soient fixées chaque fois par la position du point pris sur la courbe, puis que l'on projette sur une corde infiniment petite les segments normaux relatifs à ses extrémités; la somme algébrique ω de ces projections est l'élément dont nous voulons parler.

C'est un infiniment petit d'ordre impair, en général du troisième ordre; sinon il est du cinquième ou du septième; enfin, il ne peut être supérieur au septième ordre sans être absolument nul, et alors la courbe peut être placée sur une surface du second ordre. Ce beau théorème permet à l'auteur de définir directement et indépendamment de toute surface du second ordre les lignes qui peuvent être placées sur une telle surface, par exemple les cubiques et les biquadratiques gauches, et ce qui est plus remarquable encore, les lignes géodésiques. Ces lignes sont caractérisées par la propriéte suivante : *Si, en deux points* M *et* M′ *d'une géodésique tracée sur une surface du second ordre, on prend sur les normales principales des longueurs* MN *et* M′N′ *proportionnelles aux racines cubiques des rayons de courbure correspondants, les projections de ces segments sur la corde* MM′ *sont égales.* De là résultent deux équations différentielles qui lient l'arc, la courbure et la torsion; Laguerre écrit explicitement l'une d'elles, qui offre cette particularité remarquable, de pouvoir être intégrée sans qu'on établisse aucune relation entre la torsion et la courbure, en sorte que le carré de la torsion s'exprime algébriquement en fonction de la courbure et de ses deux premières dérivées.

Il convient en outre de signaler, sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre, une curieuse extension d'un théorème de Maclaurin relatif à l'ellipse. Si l'on nomme *axe de courbure,* en un point d'une telle géodésique, la droite qui a respectivement pour projections sur la tangente, la binormale et la normale principale, les quantités

$$\frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r}, \quad -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{ds},$$

ρ et r désignant les rayons de courbure et de torsion au point considéré, Laguerre montre que :

1° *L'axe de courbure en un point* M *est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la tangente en ce point;*

2° *Si le point* M *se déplace sur la géodésique, tandis qu'un autre point* M′ *décrit une autre géodésique de la même surface, le rapport de la projection de l'axe de courbure en* M *sur la tangente en* M′, *à la projection de l'axe de courbure en* M′ *sur la tangente en* M, *reste constant; il est d'ailleurs égal à l'unité, si les deux lignes géodésiques touchent une même ligne de courbure.*

De là résulte une construction facile de l'axe de courbure en un point quelconque d'une ligne géodésique d'une surface du second ordre et, par suite, le moyen d'obtenir les valeurs en ce point des quantités r, ρ et $\frac{d\rho}{ds}$.

Mentionnons encore, au sujet des surfaces du second ordre, la solution graphique que Laguerre a donnée pour la détermination, en un point quelconque M, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. *La normale en* M *rencontre les plans principaux de la surface en trois points; les droites* (D), *menées par ces points perpendiculairement aux plans principaux correspondants, déterminent un hyperboloïde. On peut construire deux génératrices de cet hyperboloïde appartenant au système* (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par* M; *ces génératrices rencontrent la normale en* M *aux deux centres de courbure principaux relatifs à ce point, et les plans, menés par le diamètre perpendiculairement à ces deux généra-*

trices, coupent le plan tangent en M *suivant les axes de l'indicatrice.*

Nous devons enfin citer, avant de clore ce paragraphe :

1° Une Note sur la détermination des lignes géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u};$$

ces lignes sont déterminées par la relation

$$\frac{\cos^3 i}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sin^3 i}{\sqrt{u^3}} = \text{const.},$$

i désignant l'inclinaison de la géodésique sur la courbe $v = \text{const.}$

2° Une exposition simple et lumineuse des formules fondamentales de la théorie des surfaces, telles qu'elles résultent des travaux de MM. O. Bonnet et Codazzi. Laguerre a déduit de ces formules certaines propriétés des systèmes de droites normales à une surface, qui méritent d'être remarquées :

Si des rayons émanant d'une surface S *sont normaux à une même surface et si chacun d'eux fait un angle constant avec la surface* S, *la projection de ce système de rayons sur* S *est un système de lignes géodésiques de cette surface.*

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et leurs trajectoires orthogonales, si par chaque point M *de l'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan de la tangente à cette ligne en* M *et de la normale à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant d'ailleurs constant le long d'une trajectoire orthogonale* (*mais *pouvant varier quand on passe d'une trajectoire à l'autre*), *toutes ces droites sont normales à une même surface.*

VI.

Tout théorème de Géométrie concernant des segments ou des angles comporte l'emploi des signes; mais ces théorèmes se distribuent en deux genres bien distincts.

Dans les uns, le sens positif que l'on doit attribuer à chacune des droites de la figure est arbitraire, et les énoncés, s'ils sont corrects, doivent se vérifier de quelque manière qu'on fasse cette attribution.

Dans les autres, le sens positif n'est arbitraire que pour certaines droites de la figure; et le sens positif des autres droites est déterminé par le théorème lui-même dont il est un élément essentiel. Ce sont les propositions de ce dernier genre qui constituent ce que Laguerre appelait la *Géométrie de direction.*

Laguerre donne le nom de *semi-droite* à une droite décrite dans un sens donné; une droite, pouvant être parcourue en deux sens différents, détermine donc deux *semi-droites opposées.* De même, un cercle décrit dans un sens indiqué reçoit le nom de *cycle,* et un même cercle détermine deux *cycles opposés.* En outre, une semi-droite et un cycle sont dits *tangents,* si la droite et le cercle correspondants se touchent, et si, de plus, sur l'élément commun, le sens est le même pour la droite et pour le cercle ; si les sens sont inverses, on dit que la semi-droite est une tangente apparente du cycle.

Il résulte immédiatement de là qu'*on ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée* et que *deux cycles donnés n'ont que deux tangentes communes et,* par suite, *qu'un seul* *centre de similitude.* D'ailleurs, les trois centres de similitude de trois cycles considérés deux à deux sont sur une même droite qui est l'*axe de similitude* de ces trois cycles.

On nomme *distance tangentielle de deux cycles* la distance comprise, sur l'une des deux tangentes communes, entre les deux points de contact; elle n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Le rayon d'un cycle sera considéré comme positif si le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre et comme négatif dans le cas contraire. Par suite, T étant la distance tangentielle de deux cycles, R et R′ leurs rayons et D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2,$$

qui se réduit à

$$T^2 = -4R^2$$

pour deux cycles opposés.

Le cycle qui a pour centre un point donné et qui touche une semi-droite donnée est bien déterminé; la distance du point à la semi-droite est le rayon du cercle; elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

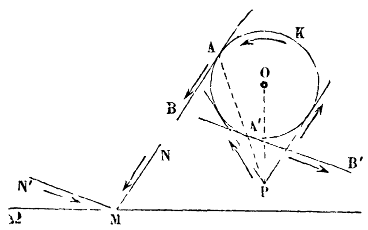
Un point doit être considéré comme un cycle infiniment petit et toutes les semi-droites passant par ce point comme des tangentes à ce cycle.

Étant données deux semi-droites, le lieu des centres des cycles qui leur sont tangents est une droite qu'on nommera la *bissectrice des deux semi-droites.* Par suite, le cycle astreint à toucher trois semi-droites données est unique, et son centre est à la rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

Il importe d'observer que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent. On le voit en supposant que, le point d'intersection des deux semi-droites restant fixe, l'angle de ces semi-droites décroisse indéfiniment de façon que les deux semi-droites viennent se confondre avec leurs bissectrices ; à la limite, les cycles inscrits se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent des semi-droites opposées.

Ces définitions étant établies, voici en quoi consiste la *méthode de transformation par semi-droites réciproques* qui constitue, sans contredit, l'une des plus ingénieuses créations de Laguerre.

Considérons une droite fixe Ω et un cycle K situés dans un même plan ; soit P un point choisi arbitrairement sur la perpendiculaire abaissée du centre O du cycle sur la droite Ω ; à chaque semi-droite MN du



plan, on peut faire correspondre une autre semi-droite de la façon suivante. Menons au cycle K la tangente AB parallèle à MN, joignons le point de contact A au point P ; puis, au point A′ où la droite AP coupe le cycle, menons la tangente A′B′ ; la semi-droite MN′ menée parallèlement à A′B′ par le point M où MN rencontre Ω sera la semi-droite correspondant à MN. Il est évident, d'après les constructions indiquées, que MN correspond réciproquement à MN′ ; on dit, d'après cela, que ces semi-droites sont *réciproques*.

On démontre aisément que *deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangentes à un même* *cycle*. La transformation se trouve caractérisée par cette propriété et par celle qui est contenue dans la définition même et qui consiste en ce que *deux semi-droites réciproques se croisent sur l'axe* Ω *de transformation*.

Il est clair que la transformation est définie quand on se donne l'axe Ω de transformation et deux semi-droites réciproques D et D'; pour obtenir la semi-droite Δ' réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, il suffira de construire le cycle tangent à D, D' et Δ; la seconde tangente menée au cycle par le point M où Δ coupe l'axe Ω sera la semi-droite demandée Δ'.

Si l'on considère une courbe C comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ' de Δ enveloppera une courbe C' qu'on nomme la *transformée* de la courbe C.

On démontre :

1° Que des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles et qu'il y a deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes;

2° Que, si une semi-droite touche deux courbes en deux points P et Q et si la semi-droite réciproque Δ' touche la transformée aux points P' et Q', les deux longueurs PQ et $P'Q'$ sont égales.

3° Qu'un cycle K a pour transformé un cycle K'; l'axe radical de K et K' est l'axe de transformation; leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes (directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes); la distance tangentielle de deux cycles est d'ailleurs égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.

Désignons par R et R' les rayons des deux cycles et par D et D' les distances de leurs centres à l'axe Ω; R et R' sont donnés en grandeur et en signe, et il en est de même de D et D′, l'axe de transformation étant ici considéré comme une semi-droite dont on fixe le sens arbitrairement. Les rapports

$$\frac{D - D'}{R - R'}, \quad \frac{D + D'}{R + R'}$$

ont une même valeur constante qu'on nomme *module de la transformation*. Une transformation étant définie par son axe et son module, il existe une infinité de cycles qui se transforment en simples points; leur propriété caractéristique consiste dans la proportionnalité de leur rayon R à la distance D de leur centre à l'axe. On peut transformer en trois points trois cycles qui ne sont pas rencontrés par leur axe de similitude.

Tels sont les principes fort simples qui servent de fondement à la transformation par semi-droites réciproques.

Cette transformation peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser certaines propriétés géométriques.

Si l'on propose, par exemple, de construire un *cycle tangent à trois cycles donnés*, on transformera ces cycles en trois points en prenant pour axe de transformation l'axe de similitude. Le cercle passant par ces points déterminera deux cycles opposés dont les réciproques sont les solutions du problème. D'ailleurs, comme deux cycles opposés rencontrent l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques, d'où l'on voit que la question proposée a deux solutions.

Le problème de mener un *cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent en attribuant un sens à chaque cercle de manière à le transformer en cycle; cette attribution pouvant se faire de quatre manières différentes, on voit qu'il y a huit solutions.

Observons encore qu'on peut souvent avec avantage employer simultanément la transformation par semi-droites réciproques et la transformation par rayons vecteurs réciproques. Par cette double transformation, on peut transformer cinq cycles en deux semi-droites et trois points.

C'est dans la géométrie de la sphère que Laguerre a puisé l'idée de sa théorie des cycles; voici comment :

Lorsqu'un point M se déplace sur une sphère, le grand cercle dont ce point est le pôle enveloppe une courbe sphérique C′ corrélative de la courbe C décrite par le point M. Mais, si à un pôle M répond un grand cercle polaire unique, à un grand cercle correspondent deux pôles, en sorte que la théorie des courbes sphériques ainsi présentée offre quelque chose de défectueux. C'est pour faire disparaître cette imperfection que Laguerre a imaginé de faire correspondre à un point M, non plus le grand cercle polaire, mais ce cercle parcouru dans un sens déterminé pour un spectateur placé sur la sphère et ayant ses pieds en M; en appelant *grand cycle* le cercle ainsi défini de position et de direction, on voit qu'à un point de la sphère répond un grand cycle polaire bien déterminé, et, réciproquement, qu'à un grand cycle correspond un pôle unique. De cette manière, la corrélative d'une courbe algébrique décrite par un point mobile sur la sphère est l'enveloppe de grands cycles et, par suite, une *courbe de direction*, c'est-à-dire une courbe telle qu'en chaque point sa tangente sphérique (arc de grand cercle) ait non seulement sa position, mais encore sa direction déterminées. Ces notions s'imposent évidemment quand on veut approfondir la géométrie de la sphère. Si maintenant on suppose que, le rayon de la sphère croissant au delà de toute limite, la sphère dégénère en un plan, les grands cycles deviendront des semi-droites, et l'on voit même ainsi comment Laguerre a été conduit à considérer les courbes planes de la quatrième classe, auxquelles il a donné le nom d'*hypercycles*. Ces courbes ne pouvaient sans doute lui échapper, puisqu'elles sont les transformées par semi-droites réciproques de la parabole et qu'il était naturel d'appliquer le mode de transformation à cette ligne, la plus simple après le cercle. Mais, par le fait, c'est en étudiant les courbes de direction corrélatives des cassiniennes sphériques dont nous avons parlé au § III, puis en faisant dégénérer la sphère en un plan, que Laguerre a obtenu les premières propriétés des hypercycles.

Nous ne voudrions pas être trop longs, mais quelques indications sont encore nécessaires pour montrer l'extension que Laguerre a su donner à cette théorie.

Le cycle et l'hypercycle sont des courbes de direction, mais il n'en est pas ainsi d'une courbe algébrique quelconque. Pour qu'on puisse transformer une courbe algébrique C de classe n en une courbe de direction C_0, en la supposant décrite dans un certain sens, il faut que, parmi les $2n$ tangentes communes à la courbe C et à un cycle quelconque K, il y en ait seulement n qui soient des tangentes effectives à C_0, les n autres étant des tangentes apparentes. L'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit donc, par l'extraction d'une racine carrée, se ramener à la résolution de deux équations de degré n, et comme, en coordonnées rectangulaires, l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2.$$

il en résulte que l'*équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme*

$$F^2(u, v) - (u^2 + v^2)\Phi^2(u, v) = 0,$$

F *et* Φ *désignant des fonctions rationnelles de* u *et de* v. Dans tout autre cas, et tel est celui d'une conique quelconque différente du cercle, pour transformer une courbe algébrique C en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, c'est-à-dire comme résultant de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la ligne C.

Les cycles, qui, ayant leurs centres sur une courbe algébrique, touchent une même semi-droite, enveloppent évidemment une courbe de direction qui est une anticaustique de la ligne primitive, les rayons incidents étant perpendiculaires à la semi-droite considérée. Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction, et, réciproquement, une courbe de direction quelconque est une anticaustique d'une infinité de lignes algébriques qu'on peut déterminer.

Les courbes parallèles à une courbe de direction sont également des courbes de direction, et il en est de même de l'enveloppe de leurs normales.

Outre de nombreuses propriétés des systèmes de cycles et les conséquences intéressantes qui en résultent relativement aux coniques, Laguerre a donné une théorie complète des hypercycles et en particulier de l'hypercycle cubique. Tandis qu'un hypercycle quelconque peut être défini comme une courbe de la quatrième classe et du sixième ordre, passant par les ombilics du plan et ayant trois tangentes doubles dont l'une est la droite de l'infini, ou encore comme une anticaustique par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant parallèles, l'hypercycle cubique peut être défini comme une courbe de troisième classe, passant par les ombilics, touchant la droite de l'infini et ayant une tangente double apparente, ou encore comme une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles; c'est la courbe de direction la plus générale de la troisième classe, et, par suite, la première à étudier après les cycles, qui constituent à eux seuls les courbes de direction de la seconde classe. Laguerre a résolu, relativement à l'hypercycle cubique, les divers problèmes qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas et a indiqué un grand nombre de propriétés, parmi lesquelles il faut surtout signaler une relation remarquable entre six tangentes quelconques.

Toutes les notions qui précèdent peuvent d'ailleurs être étendues à l'espace, notamment la méthode de transformation qui est alors une *transformation par semi-plans réciproques* et d'où Laguerre a déduit, entre autres applications, les beaux théorèmes de M. Darboux sur les anticaustiques des surfaces du second ordre.

VII.

Passons maintenant aux travaux d'Analyse pure.

Les premières recherches analytiques de Laguerre ont pour objet des méthodes d'approximation pour des fonctions spéciales. Elles trouvent leur point de départ dans certains Mémoires de Lagrange ou de Jacobi et dans divers travaux de M. Hermite, pour lequel Laguerre professait une si légitime admiration.

Lagrange s'était occupé de la réduction en fraction continue d'une fonction définie par une équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels. Laguerre, considérant le cas particulièrement important où l'équation est linéaire, a résolu la question d'une manière bien plus complète en signalant et utilisant les liens étroits qui rattachent cette recherche à la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre admettant pour intégrales des polynômes algébriques. Soit une fonction z développable suivant les puissances décroissantes de x et satisfaisant à l'équation différentielle

$$Wz' = 2Vz + U,$$

où U, V, W désignent des polynômes entiers. La réduite de rang $n+1$ étant

$$\frac{\varphi_n}{f_n},$$

Laguerre montre d'abord que f_n satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont

$$e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z)$$

est une deuxième solution; il ramène ainsi la question à former cette équation du second ordre et à déterminer les polynômes du premier degré Q_n qui figurent dans la formule de récurrence

$$f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0.$$

A cet effet, il introduit des polynômes auxiliaires, dont les uns Θ_n sont du degré de l'expression

$$\frac{V}{x} + \frac{W}{x^2},$$

et les autres Ω_n d'un degré supérieur d'une unité. Ces polynômes satisfont à quatre identités, d'où l'on déduit immédiatement et sans calcul les polynômes Q_n et l'équation différentielle, dans le cas où Θ_n est de degré zéro. Lorsque Θ_n est d'un degré plus élevé, les identités dont nous venons de parler permettent de déduire Θ_{n-1} et Ω_{n-1} de Θ_n et Ω_n, et par suite, de calculer par récurrence les polynômes Q_n, ainsi que les numérateurs et les dénominateurs des réduites.

Laguerre a appliqué cette théorie à diverses fonctions, et notamment aux fonctions

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}, \quad \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^m, \quad \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

On sait que Laplace a donné, dans la *Mécanique céleste,* le développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}dx;$$

sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est absolument inadmissible, bien que les résultats soient exacts, comme l'a fait voir Jacobi en démontrant ces résultats directement. Laguerre fait observer que la méthode qu'il a appliquée à l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

subsiste entièrement pour l'intégrale de Laplace; ajoutons que sa méthode a l'avantage de montrer avec netteté comment, en partant d'une série divergente, on peut arriver néanmoins à une fraction continue donnant la valeur de la fonction à représenter.

Le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme avait déjà fixé l'attention de Jacobi, mais seulement au point de vue de la détermination des coefficients. Laguerre a montré comment on pouvait rattacher cette théorie difficile à celle beaucoup plus aisée de l'approximation par les fractions rationnelles. Il a traité, en particulier, deux cas fort intéressants : celui de e^z suivant les puissances d'un polynôme $F(z)$, et celui de $f(x+tz)$, f désignant une fonction quelconque, suivant les puissances de $x(x-1)$. Dans le premier cas, il est conduit à une équation différentielle linéaire d'ordre n qu'il intègre complètement, en employant l'équation adjointe de Lagrange. L'étude du second le conduit à une élégante formule d'interpolation, trouvée antérieurement et de tout autre façon par M. Hermite.

Voici encore, dans le même ordre d'idées, un résultat très important. Après avoir démontré géométriquement ce théorème de M. Hermite : « *Si, pour toutes les racines de l'équation*

$$F(x) + i\Phi(x) = 0,$$

le coefficient de i a le même signe, l'équation

$$p\,F(x) + q\,\Phi(x) = 0,$$

où p et q désignent deux nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles », Laguerre établit la proposition suivante :

$F(x)$ *désignant un polynôme de degré* $n\mu$, *tellement choisi que les fractions*

$$\frac{\Phi_1(x)}{F(x)}, \quad \frac{\Phi_2(x)}{F(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_n(x)}{F(x)}$$

approchent le plus des transcendantes

$$e^{a_1 x}, \quad e^{a_2 a}, \quad \ldots, \quad e^{a_n x},$$

le polynôme $F(x)$ *est entièrement caractérisé par cette propriété que, dans le développement de* $F(x)\,e^{ax}$ *suivant les puissances croissantes de* x, *le coefficient de* $x^{\mu(n-1)}$ *est*

$$z^\mu(z-a_1)^\mu(z-a_2)^\mu\ldots(z-a_n)^\mu.$$

L'expression de $F(x)$ résulte de là fort aisément.

Citons enfin, pour ne rien omettre d'essentiel :

1° Une étude sur le développement de l'intégrale

$$\int z^n e^{-\frac{1}{2}z^2+zx},$$

qui conduit aux polynômes U_n, rencontrés déjà par M. Hermite à propos des dérivées successives de $e^{\frac{x^2}{2}}$;

2° Une démonstration, par la théorie des fractions continues algébriques, du théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation, théorème qui, donné d'abord par Cauchy, avait été démontré par Borchardt au moyen de la théorie des fonctions ultra-elliptiques.

3° Une Note sur la partition des nombres, qui se rattache à la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\ldots(1-z^l)},$$

a, b, ..., l étant les coefficients entiers de l'équation

$$ax+by+\ldots+lu=N,$$

dont il s'agit de trouver *approximativement* le nombre T(N) des solutions entières et positives. En appliquant sa théorie générale aux cas simples

$$ax+by=N \qquad \text{et} \qquad ax+by+cz=N,$$

Laguerre obtient les formules

$$T(N)=\frac{N}{ab},$$

$$T(N)=\frac{N}{2abc}(N+a+b+c),$$

dont la première est bien connue et attribuée à Paoli.

VIII.

Les travaux de Laguerre sur la résolution des équations numériques forment par leur ensemble la partie la plus considérable de son œuvre, et peut-être celle à laquelle il attachait le plus de prix. Il se proposait, avant que la mort vînt le surprendre, de coordonner ces recherches et de les réunir en un Volume qui en eût renfermé l'exposition complète. Ce Volume, dont seulement les premiers Chapitres ont été rédigés et publiés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, eût été divisé en trois Sections ayant trait respectivement à la généralisation et aux applications du théorème de Descartes, aux méthodes d'approximation pour le calcul des racines, enfin à la recherche des racines imaginaires. C'est cet ordre même que nous allons suivre ici.

La première Partie est la plus complète, et Laguerre semble avoir dit son dernier mot sur ce sujet.

Le théorème de Descartes consiste dans la proposition suivante :

$F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

Laguerre observe que, la proposition étant évidente lorsque les termes du polynôme ont tous le même signe, il suffit de prouver que le théorème, étant admis dans le cas où $F(x)$ compte $m - 1$ variations, subsiste lorsque $F(x)$ a une variation de plus. A cet effet, il applique le principe de Rolle à l'équation

$$x^{-a} F(x) = 0,$$

dans laquelle a est un nombre arbitraire et dont les racines positives sont d'ailleurs les mêmes que celles de

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Il en conclut que le nombre des racines positives de cette équation (1) est au plus supérieur d'une unité à celui des racines positives de l'équation

$$x\,F'(x) - a\,F(x) = 0. \tag{2}$$

Or on voit aisément, en mettant en évidence la composition des polynômes $F(x)$ et $F'(x)$, que le premier membre de l'équation (2) offre, comme $F(x)$, $m - 1$ variations; l'équation (2) a donc au plus $m - 1$ racines positives, et, par suite, l'équation proposée (1) en renferme un nombre au plus égal à m.

Nous avons indiqué cette démonstration, non seulement à cause de sa simplicité, mais surtout parce qu'on y trouve l'origine de l'extrême généralisation que Laguerre est parvenu à donner au théorème de Descartes. Rien dans cette démonstration, et c'est là le point décisif, ne suppose que $F(x)$ soit un polynôme entier; les exposants pourraient être fractionnaires ou incommensurables; $F(x)$ peut même être une série ordonnée suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x. Le théorème de Descartes prend dès lors une extension considérable, et Laguerre l'énonce comme il suit :

W *étant une série ordonnée suivant les puissances entières, fractionnaires ou incommensurables de* x, *le nombre des valeurs positives de* x, *pour lesquelles la série* W *est convergente et a pour valeur zéro, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des divers termes de la série.*

De là découlent un grand nombre de règles simples et nouvelles pour certains types d'équations remarquables, telles que

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}=0$$

et

$$\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz=0,$$

$$\int_a^b \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-x)^n}=0,$$

où $\Phi(z)$ désigne une fonction qui peut être discontinue. Nous citerons encore les deux théorèmes suivants :

$F(x)$ désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et ayant tous ses coefficients positifs ou nuls, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant, d'autre part, des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines positives de l'équation

$$A_1F(\alpha_1 x)+A_2F(\alpha_2 x)+\ldots+A_nF(\alpha_n x)=0,$$

c'est-à-dire le nombre des valeurs positives de x, pour lesquelles le premier membre converge vers zéro, est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_n.$$

Étant donnés un polynôme entier $f(x)$ et un nombre positif quelconque α, on peut toujours déterminer un nombre entier p, tel que l'équation

$$(1+\alpha x)^p f(x)=0$$

présente autant de variations que l'équation $f(x)=0$ a de racines positives.

Cette seconde proposition a été généralisée depuis par M. Poincaré.

Mais Laguerre ne s'est pas arrêté là. Il a étendu d'abord la règle des signes de Descartes au cas où le premier membre de l'équation est exprimé linéairement au moyen des polynômes de Legendre, et plus généralement au moyen de polynômes entiers satisfaisant à certaines équations différentielles linéaires du second ordre; puis, poursuivant encore le cours de ses recherches, il a étudié les équations dont le premier membre est une fonction entière de x, en introduisant, d'après Weierstrass, la notion du genre d'une fonction. La plupart des propositions relatives aux équations dont le premier membre est un polynôme entier ne s'appliquent plus alors que sous de nombreuses réserves. Tel est, par exemple, le théorème des lacunes; après avoir cité des exemples où cette proposition est en défaut, Laguerre a montré que le théorème subsiste dans le cas où les éléments simples du premier membre de l'équation sont des fonctions du genre zéro ou du genre 1, ou des exponentielles de la forme e^{ax^2+bx+c}, a, b, c désignant des nombres réels quelconques dont le premier est essentiellement négatif. Dans ce même ordre d'idées, il a fait voir encore que :

Si la fonction entière du genre n, $\mathrm{F}(x)$, ne s'annule que pour un nombre limité de valeurs imaginaires, toutes les dérivées de $\mathrm{F}(x)$ sont du genre n.

Enfin, il a réussi à démontrer que la transcendante de Bessel est du genre zéro, proposition que Fourier avait trouvée jadis, mais par des raisonnements justement contestés par Poisson et Cauchy.

Passons maintenant à la deuxième Partie, c'est-à-dire aux questions relatives à l'approximation des racines des équations algébriques ou transcendantes.

La méthode de Newton pour déterminer une limite supérieure des racines positives d'une équation

$$(1) \qquad f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

consiste à trouver une quantité a qui rende positives la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives. Mais le calcul des valeurs numériques de la suite

$$(2) \qquad f(x), \quad f'(x), \quad \ldots, \quad f^{(m)}(x)$$

est pénible, d'autant plus que la connaissance des valeurs de plusieurs termes de cette suite ne facilite en rien le calcul des suivants. Laguerre montre qu'on peut atteindre le même but à l'aide des fonctions

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_m(x) = A_0, \\ f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}, \\ f\,(x) = A_0 x_m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \end{array} \right.$$

dont le calcul est beaucoup plus aisé, attendu que les valeurs de ces fonctions se présentent successivement d'elles-mêmes dans le calcul de la valeur que prend la dernière $f(x)$ pour une valeur donnée de x. Ainsi :

Tout nombre positif a, qui rend positifs les polynômes de la suite (3), *est une limite supérieure des racines de l'équation* (1).

Les mêmes observations critiques s'appliquent encore, et avec plus de force, au théorème de Budan qui indique comme limite supérieure du nombre des racines réelles comprises entre deux nombres a et b la différence entre les nombres de variations qu'offre la suite (2) pour $x = a$ et $x = b$. Laguerre résout le même problème, d'une manière bien moins pénible :

Si l'on désigne par a et b deux nombres positifs et par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, le nombre des racines réelles de l'équation (1) comprises entre a et b est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(a), \\ f(b) - b(b-a)C_0, \\ f(b) - b^2(b-a)C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(b) - b^{m-1}(b-a)C_{m-2}, \\ f(b); \end{array}\right.$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Faisant ensuite l'application de ce théorème à la question suivante : *Déterminer deux limites entre lesquelles restent comprises les valeurs du polynôme $f(x)$ lorsque x reçoit toutes les valeurs situées entre deux nombres positifs a et b*, il trouve que ces limites sont le plus petit et le plus grand des termes de la suite (4).

Dès qu'on a une valeur suffisamment approchée d'une racine d'une équation, la méthode d'approximation de Newton et la méthode des parties proportionnelles fournissent l'une et l'autre des moyens commodes et rapides pour approcher indéfiniment de cette racine. La difficulté principale est d'obtenir cette valeur assez approchée pour servir de point de départ. Laguerre cherche à l'éviter en posant la question d'une autre façon : *Étant donné un nombre arbitraire x, déterminer, sans tâtonnement et par suite d'opérations régulières, des* *valeurs de plus en plus approchées de la racine immédiatement supérieure ou immédiatement inférieure à x.* Il résout complètement ce problème pour les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, à l'aide de la proposition suivante :

En désignant par $f(x) = 0$ une équation de degré n dont toutes les racines sont réelles et par α une quantité arbitraire, les deux valeurs de x déterminées par l'équation

$$(5)\qquad \frac{1}{x-\alpha} = -\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} + \frac{\varepsilon}{nf(\alpha)}\sqrt{(n-1)\mathrm{H}(\alpha)}$$

sont respectivement comprises entre α et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent x.

Dans la formule (5), ε désigne l'unité prise avec le signe de $f(\alpha)$, et $\mathrm{H}(x)$ représente le hessien

$$\mathrm{H}(x) = f'^2(x) - nf(x)f''(x)$$

de $f(x)$; on sait d'ailleurs que ce hessien a une valeur toujours positive.

Ce théorème résout pleinement la question proposée : on tirera de la formule (5) une valeur convenable de $x - \alpha$; puis, en partant de la nouvelle valeur de x, ou, pour faciliter les substitutions, de toute autre valeur comprise entre x et α, on continuera les opérations qui permettront ainsi d'approcher indéfiniment de la racine.

Cette méthode offre sur celle de Newton l'avantage de n'être jamais en défaut, quelle que soit la valeur de départ α, et l'on démontre sans peine que, dans le cas où la méthode de Newton peut être employée avec sûreté, la formule (5) donne toujours une approximation plus grande.

Signalons encore un théorème très important sur la séparation des racines des équations dont toutes les racines sont réelles :

Si l'on désigne par α *une quantité réelle arbitraire, les nombres* ξ *et* ξ', *qui satisfont à la relation*

$$(\xi-\alpha)(\xi'-\alpha)[f'^2(\alpha)-f(\alpha)f''(\alpha)] \\ +(\xi+\xi'-2\alpha)f(\alpha)f'(\alpha)+nf(\alpha)^2=0,$$

et dont l'un est arbitraire, séparent les racines de l'équation, de degré n, $f(x)=0$.

Nous appellerons, à ce sujet, l'attention sur le principe élégant qui sert de base à la démonstration de ce théorème et de plusieurs autres propositions du même genre : il consiste à mettre la relation qui exprime la propriété à démontrer sous une forme telle qu'elle ne renferme que des covariants de la forme binaire $f(x, y)=0$; la propriété ainsi présentée se trouve alors projective et il suffit, pour l'établir généralement, de la démontrer pour deux valeurs particulières des deux variables indépendantes.

Le cas des équations dont toutes les racines sont réelles est très important, les équations de ce genre s'offrant d'une manière fréquente en Analyse. La place nous manque pour suivre Laguerre dans les diverses applications de ses méthodes aux équations qui déterminent $\cos\frac{\alpha}{n}$, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{n}$, ..., ainsi qu'à celles qu'on obtient en égalant à zéro les polynômes X_n de Legendre, les polynômes U_n de M. Hermite, et plus généralement les polynômes $\Phi(x)$ qui satisfont à une équation différentielle linéaire du second ordre. Dans le cas où l'équation $\Phi(x)=0$ a toutes ses racines réelles, Laguerre forme une expression simple Ω qui doit avoir une valeur positive ou nulle toutes les fois qu'on y met pour x une racine de l'équation. Si donc Ω n'est pas positive pour toutes les valeurs de x, on obtiendra par là même des limites comprenant les racines de l'équation; en particulier, si Ω est toujours négative, on pourra affirmer l'existence de racines imaginaires.

La troisième Partie concerne la recherche des racines imaginaires. Elle renferme une notion absolument nouvelle, celle des *points dérivés,* dons nous allons indiquer en quelques mots le sens et l'utilité.

Soit l'équation $f(x,y)=0$, de degré n, où y est égal à l'unité et a été introduit pour rendre le polynôme f homogène; si l'on représente, à la manière de Cauchy, une quantité imaginaire par un point du plan et si M est le point représentatif de x, Laguerre nomme *point dérivé de* M le point m qui représente la quantité ξ définie par la relation

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

d'où il résulte que, si M est le point représentatif d'une valeur x approchée d'une racine et si M′ désigne le point représentatif de la valeur approchée que donne la méthode de Newton, le point dérivé m s'obtiendra en portant à partir de M, dans la direction MM′, une longueur égale à n.MM′.

Cette considération donne lieu à plusieurs propositions nouvelles dont voici les deux plus simples :

Tout cercle passant par un point quelconque du plan et par le point dérivé renferme au moins une racine de l'équation; et il y a aussi au moins une racine en dehors du cercle.

Pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que chaque point du plan et son *point dérivé soient situés de part et d'autre de l'axe des x.*

Du premier théorème résulte le moyen de calculer les racines par approximations successives. Supposons, en effet, qu'on ait déterminé un contour fermé, un cercle par exemple, renfermant dans son intérieur une seule racine. Si l'on a déterminé une valeur suffisamment approchée de la racine, on pourra trouver un point M intérieur au cercle et tel que ce cercle renferme aussi le point dérivé m. Par les points M et m on mènera alors deux cercles C et C′ tangents au cercle donné, et il est clair que la racine cherchée devra se trouver dans la lunule commune à C et à C′; en continuant les mêmes constructions, qui peuvent d'ailleurs être remplacées par des formules analytiques, on parviendra à déterminer la racine avec telle approximation qu'on voudra.

Laguerre a appliqué les considérations qui précèdent à la détermination des racines imaginaires des équations à coefficients réels qui n'ont que deux racines imaginaires.

Cette troisième Partie, on le voit, est la moins complète, sinon la moins remarquable des trois. Nul doute que, si le temps ne lui eût fait défaut, Laguerre n'eût heureusement complété ses belles tentatives dans un genre de recherches si hérissé de difficultés.

IX.

Les travaux de Laguerre sur les équations différentielles comprennent : d'abord un Mémoire sur le facteur intégrant des équations du premier ordre, et deux autres applications intéressantes du principe du dernier multiplicateur de Jacobi; puis un Mémoire fondamental sur les équations linéaires d'ordre quelconque, enfin une exposition fort ingénieuse et très nette de la méthode de

Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Le Mémoire relatif à la recherche du facteur d'intégrabilité complète d'importants résultats obtenus par Lagrange. Soit

$$dy - z\,dx = 0$$

l'équation du premier ordre à intégrer, dans laquelle z est déterminé par l'équation $V(x, y, z) = \alpha$, où α désigne une constante arbitraire. M étant un facteur propre à rendre $dy - z\,dx$ une différentielle exacte, on peut supposer que, dans son expression, on ait remplacé α par $V(x, y, z)$, en sorte que le multiplicateur M soit une fonction des trois variables indépendantes x, y, z; cette fonction satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles dont il suffira de trouver une solution particulière pour intégrer l'équation proposée. Inversement, étant donné un multiplicateur $M(x, y, z)$, on peut demander toutes les fonctions V jouissant de la propriété que, z étant déterminé par la relation $V(x, y, z) = \alpha$, l'équation $dy - z\,dx$ admette M comme facteur intégrant. En se fondant sur la théorie du dernier multiplicateur, Laguerre fait voir que, si l'on connaît une valeur particulière de V, on peut les déterminer toutes par une quadrature pouvant être réellement effectuée. De là résulte, en particulier, que si l'on sait intégrer une équation différentielle du premier ordre renfermant une constante arbitraire ou, ce qui est équivalent, une équation différentielle du second ordre, on saura par là même intégrer un type d'équations différentielles du premier ordre renfermant trois fonctions arbitraires. Lagrange avait déjà donné une proposition semblable, mais où il n'entrait qu'une fonction arbitraire.

Les deux autres applications du principe du dernier multiplicateur ont trait : l'une à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où F désigne une fonction quelconque et f un polynôme du second degré ; l'autre à l'équation

$$(2) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant un polynôme du second degré. Laguerre, en utilisant les propriétés des formes quadratiques, montre qu'on peut intégrer l'équation (1), dès que l'on connaît une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{\varphi(x,y)}},$$

φ désignant un autre polynôme du second degré. Quant à l'équation (2), qui est évidemment satisfaite par tous les polynômes du troisième degré dont le hessien est $f(x)$, Laguerre donne l'expression de son intégrale générale à l'aide des fonctions elliptiques.

Arrivons aux équations linéaires d'ordre quelconque. Si, dans une telle équation d'ordre n, on conserve la variable indépendante x, en remplaçant la fonction inconnue y par zu, et si l'on dispose de z de manière à faire évanouir, dans la transformée, le second terme, c'est-à-dire le terme en $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$, les coefficients des termes qui suivent sont des fonctions que Laguerre qualifie de *semi-invariants;* ces fonctions jouissent en effet de la propriété d'invariance lorsque l'on conserve la variable indépendante en prenant une autre fonction pour inconnue. De l'étude de ces semi-invariants, Laguerre déduit, en particulier, que l'on peut toujours, dans une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque, faire disparaître le troisième et le quatrième terme par l'intégration d'une équation linéaire du second ordre et une quadrature. Il signale, en outre, pour l'équation linéaire du troisième ordre, un invariant tel que, lorsqu'il s'annule, il existe une relation homogène et du second degré entre trois solutions quelconques de l'équation différentielle proposée.

Nous ne saurions trop appeler l'attention sur ce travail dont M. O. Bonnet et M. Hermite ont parlé tour à tour à l'Académie des Sciences en termes si élogieux. Ce n'est que deux ans après avoir communiqué ses idées sur ce sujet à M. Bertrand que Laguerre, toujours peu empressé de mettre au jour ses recherches, les a publiées dans les *Comptes rendus*. Pendant qu'il parvenait ainsi à la conception si originale des invariants des équations différentielles, M. Halphen, en suivant un ordre d'idées différent, arrivait de son côté à la notion des invariants différentiels qu'il a développée avec tant d'éclat. Ces deux géomètres se partagent donc la gloire d'avoir, simultanément et indépendamment l'un de l'autre, ouvert une voie féconde déjà très brillamment parcourue, mais non encore entièrement explorée.

Dans son exposition si élégante et vraiment curieuse de la méthode de Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Laguerre commence par observer que le premier membre W de l'équation à intégrer

$$Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2) = 0$$

peut être mis, d'une infinité de manières, sous la forme

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

$a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des quantités dont trois peuvent être choisies arbitrairement. Tous les systèmes de valeurs de ces quantités se distribuent en deux groupes correspondant aux deux signes du radical

$$\sqrt{K^2 - HL - MN}.$$

Représentons par $F(A, B, C, D)$ l'expression

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + p\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + q\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + C\frac{\partial\omega}{\partial p} + D\frac{\partial\omega}{\partial q},$$

et désignons par

$$(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta), (a', b', c', d', \alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

deux systèmes de valeurs des indéterminées n'appartenant pas à un même groupe. Toute la méthode pourra être renfermée dans ce théorème unique :

u et v étant deux solutions communes au système d'équations

$$F(a, b, c, d) = 0,$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

et u' et v' deux solutions communes au système

$$F(a', b', c', d') = 0,$$
$$F(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = 0,$$

si, des équations

$$u - f(v) = 0,$$
$$u' - \varphi(v') = 0,$$

où f et φ désignent des fonctions arbitraires, on tire p et q en fonction de x, y, z, ces valeurs, substituées dans

$$p\,dx + q\,dy,$$

rendront cette expression une différentielle exacte, et l'on aura la fonction inconnue z par la formule

$$z = \int (p\,dx + q\,dy).$$

Dans le cas où le radical dont nous avons parlé ci-dessus s'annule, un seul système de valeurs de a, b, c, d, α, β, γ, δ suffit.

Passons maintenant aux travaux sur les transcendantes elliptiques et abéliennes. Nous avons cité déjà la belle construction que Laguerre a donnée pour l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce. Nous devons signaler encore diverses recherches sur la transformation des fonctions elliptiques, entreprises surtout dans le but de généraliser des résultats trouvés par M. Hermite relativement à la transformation du troisième ordre.

Le problème de la transformation peut être posé dans les termes suivants :

$U(x, y)$ *étant une fonction homogène du quatrième degré* (y est ici introduit pour l'homogénéité et doit être supposé égal à 1) *et* H *étant son hessien, trouver une intégrale rationnelle* $z = \frac{X}{Y}$ *de l'équation*

$$\frac{dz}{\sqrt{U(z, 1)}} = \frac{dx}{\sqrt{\lambda U + \mu H}},$$

les nombres λ *et* μ *étant convenablement choisis.*

Dans le cas où le degré de la transformation est de la forme $4n \pm 1$, Laguerre ramène la détermination de X et Y à celle de deux polynômes homogènes en U et H, qui ne dépendent des valeurs particulières attribuées à U que par les valeurs des invariants S et T de ce polynôme U; cette détermination peut s'effectuer par les méthodes données par Jacobi.

Laguerre fait connaître en outre une transformation remarquable de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + Cx^2 + 4Dx + E}} = du;$$

en posant $x = \frac{X}{Y}$, on peut remplaeer cette équation par un système d'équations renfermant une fonction arbitraire u, et, dans le cas où cette fonction se réduit à une constante, les valeurs de X et de Y qui satisfont à ce système d'équations donnent les fonctions Θ de Jacobi et les fonctions Al de Weierstrass. Laguerre déduit de là plusieurs résultats importants déjà trouvés par Jacobi et Eisenstein.

Enfin, tandis que Jacobi avait ramené la réduction en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré à la multiplication des fonctions elliptiques, Laguerre, adoptant le point de vue opposé, montre que l'intégrale algébrique de l'équation

$$\frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}} + \frac{n\,dx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0,$$

où n est un nombre impair et où η et y sont introduits pour l'homogénéité, résulte de la connaissance de deux polynômes homogènes dont la détermination se ramène à la réduction en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré. Il donne d'ailleurs cette intégrale algébrique sous forme explicite pour le cas de $n = 3$ et pour celui de $n = 5$.

Laguerre s'est aussi occupé avec succès des fonctions abéliennes. Dans un Mémoire trop peu remarqué sur le calcul des *systèmes linéaires*, après avoir développé les règles de ce nouveau calcul qui a une étroite connexion avec les quaternions d'Hamilton, les clefs algébriques de Cauchy et les imaginaires congruentielles de Galois, Laguerre en fait l'application à la théorie des formes et à celles des fonctions abéliennes. En représentant toutes les variables par ce qu'il appelle une *variable linéaire,* il obtient une notation commode à certains égards, et qui lui permet de condenser en une formule unique les 2^{2n} séries différentes, dont les quotients donnent les fonctions abéliennes d'ordre n. Il parvient ainsi à étendre aux fonctions abéliennes d'ordre quelconque plusieurs propriétés données antérieurement par M. Hermite sur les fonctions du premier ordre, et notamment cette notion capitale des *formes abéliennes* que M. Hermite a introduites dans la Science et qui jouent, dans cette théorie, un rôle analogue à celui des formes binaires dans la théorie des fonctions elliptiques.

Pour achever notre tâche, nous n'avons plus qu'à parler d'un dernier travail concernant l'attraction des ellipsoïdes et où l'on retrouve en quelque sorte inopinément une fort ingénieuse application de cette théorie des imaginaires, qui a toujours été l'étude de prédilection de notre savant ami. La méthode consiste, en effet, à décomposer les ellipsoïdes en tranches comprises entre des plans infiniment voisins et parallèles au plan

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0.$$

Il est vrai que ces plans sont imaginaires et au premier abord la décomposition ne semble avoir aucun sens; mais il résulte des principes établis par M. Hermite, dans sa belle théorie des coupures des intégrales définies, que, si l'on effectue les calculs en attribuant à i une valeur réelle, les résultats obtenus sont encore valables lorsqu'on fait $i = \sqrt{-1}$. C'est ainsi que Laguerre parvient à une expression du potentiel de deux ellipsoïdes qui est relativement d'une extrême simplicité; la comparaison de ses formules avec les résultats, déjà si parfaits, qu'avaient obtenus ses nombreux et célèbres devanciers, conduit à des propositions nouvelles dont la démonstration directe offrirait de sérieuses difficultés.

Le théorème de Laguerre peut être énoncé simplement comme il suit :

Soient $\psi(x, y, z)$ *et* $\psi_0(x, y, z)$ *deux formes quadratiques,* Ω *et* Ω_0 *leurs discriminants, et* Δ *et* Δ_0 *les valeurs que prennent leurs formes adjointes, quand on y remplace respectivement les variables par*

$$\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\Omega}}, \quad \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\Omega}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$$

et par

$$\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\Omega_0}}, \quad \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\Omega_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}.$$

Désignons par ξ, η, ζ *les coordonnées du centre du second ellipsoïde par rapport à des axes rectangulaires passant par le centre du premier ; les équations des surfaces extérieures des deux corps étant*

$$\psi(x, y, z) = 1,$$
$$\psi_0(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = 1,$$

représentons par $f(\lambda^2)$ *et* $f_0(\lambda^2)$ *les densités des couches dont les surfaces extérieures ont pour équations*

$$\psi(x, y, z) = \lambda^2,$$
$$\psi(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = \lambda^2,$$

et posons

$$\int_{t^2}^{1} f(\lambda)\,d\lambda = \mathrm{F}(t), \qquad \int_{t_0^2}^{1} f_0(\lambda)\,d\lambda = \mathrm{F}_0(t_0).$$

Le potentiel P *des deux ellipsoïdes s'exprime par la formule*

$$\mathrm{P} = \frac{9\mathrm{VV}_0}{32\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{F}(t)\,\mathrm{F}_0(t_0)\,dt\,dt_0\,d\varphi}{i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\pi + \zeta - t\sqrt{\Delta} - t_0\sqrt{\Delta_0}},$$

dans laquelle V *et* V_0 *sont les volumes des deux corps et où l'on suppose* $\zeta > 0$.

La formule se réduit notablement lorsque les ellipsoïdes sont de révolution, Δ et Δ_0 étant alors des carrés parfaits.

Dans le cas où les ellipsoïdes sont homogènes, en appelant ω et ω_0 leurs densités, on a

$$F(t) = \omega(1 - t^2), \qquad F_0(t_0) = \omega_0(1 - t_0^2).$$

Il est aisé de voir que Δ a la même valeur pour des ellipsoïdes homofocaux, ce qui conduit au théorème de Maclaurin. Mais hâtons-nous d'observer, avec Laguerre, pour faire ressortir pleinement la perfection de la méthode, que ce théorème ne résulte pas seulement du résultat final du calcul : il est encore une conséquence immédiate de la marche même suivie pour effectuer les intégrations. Tous les plans parallèles au plan

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0$$

sont des plans isotropes, et, pour déterminer les limites des intégrations relatives à t et à t_0, il suffit de déterminer ceux de ces plans qui touchent chacun des ellipsoïdes. Comme φ prend toutes les valeurs possibles de 0 à 2π, on a donc à considérer tous les plans isotropes qui sont tangents à chacune des surfaces; et, comme deux surfaces homofocales du second ordre touchent les mêmes plans isotropes, il faut conclure que le potentiel n'est modifié que par l'introduction d'un facteur constant, lorsque l'on substitue à l'un des ellipsoïdes un ellipsoïde homofocal.

Enfin Laguerre montre comment l'expression du potentiel donnée ci-dessus conduit aisément à son développement suivant les puissances de l'inverse de la distance des centres des deux corps.

X.

Tel est l'inventaire des richesses que nous a laissées notre regretté camarade.

On ne saurait s'y méprendre. L'homme que la Science vient de perdre n'était pas seulement un géomètre distingué, habile à trouver d'heureux développements et des solutions élégantes : c'était un inventeur, aux idées neuves et fécondes, dont les écrits sur l'emploi des imaginaires, sur la théorie des équations, sur les cycles, etc., rendront le nom impérissable. « Laguerre », disait M. O. Bonnet, dans un savant Rapport à l'Académie, « est un des géomètres les plus pénétrants de notre époque; ses découvertes en Géométrie lui assignent le premier rang parmi les successeurs de Chasles et de Poncelet, et ses recherches nombreuses et profondes sur l'Algèbre et le Calcul différentiel et intégral accusent un talent d'analyste de premier ordre. »

Et cependant jamais plus de modestie ne s'allia à un mérite si éclatant. « Edmond Laguerre », écrivait notre illustre et vénéré maître, M. Bertrand, pour les funérailles de son jeune Confrère, « Edmond Laguerre, passionné pour la Science, semblait indifférent au succès. Jamais il n'a négligé un devoir; jamais il n'a sollicité une faveur..... Toujours oublieux de se faire valoir, il a pris sa retraite, jeune encore, sans avoir atteint dans l'artillerie les hauts grades où son mérite semblait l'appeler..... Ses découvertes l'avaient placé au premier rang des géomètres français avant que l'Académie des Sciences en eût entendu discuter et proclamer l'importance. »

Hélas! ce fauteuil à l'Institut qu'il avait conquis sans coup férir, il devait à peine l'occuper! C'est au moment où tout semblait lui sourire et où la bienveillance de M. Bertrand lui ouvrait les portes du Collège de France que la mort est venue nous le ravir. Son beau travail sur l'attraction des ellipsoïdes a été le chant du cygne. A la fin des examens de février, à l'École Polytechnique, une fièvre violente le prit que rien ne put vaincre, ni les soins les plus affectueux, ni le séjour momentané de Versailles, ni l'air du pays natal, conseillé comme dernier recours. Le 14 août 1886, cette belle intelligence s'éteignit doucement, sans avoir livré tous ses secrets.

Puissent sa veuve et ses enfants puiser quelques consolations dans les paroles éloquentes que M. Halphen a prononcées sur sa tombe, et dans le pieux hommage que j'adresse ici à notre cher camarade, au nom de cette École qu'il aima avec passion, sur laquelle il a fait rejaillir tant d'éclat et qui, par un sort étrange, au moment où l'instruction est partout en honneur, semble avoir à se faire pardonner de produire encore de si glorieux enfants.