Nouvelles annales de mathématiques

Sur le cercle orthoptique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 97-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__97_1>

SUR LE CERCLE ORTHOPTIQUE [1];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient donnés un cercle C et deux axes rectangulaires Ox et Oy par le centre O de ce cercle. Il y a une infinité de rectangles inscrits dans ce cercle et ayant leurs côtés respectivement parallèles à Ox et Oy, et dans chacun de ces rectangles une conique inscrite K ayant ses axes dirigés suivant Ox et Oy. Pour chacune des coniques K, le cercle C est orthoptique.

Prenons sur le cercle C un point fixe M (α, β), et

(1) On sait que ce nom a été anciennement donné au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique.

cherchons l'enveloppe des polaires π de ce point par rapport aux coniques K.

R étant le rayon du cercle C, ρ le demi-côté parallèle à Ox du rectangle inscrit, l'équation de la conique K est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{R^2 - \rho^2} = 1.$$

La polaire du point M par rapport à cette conique a pour équation

$$(1) \qquad (R^2 - \rho^2)\alpha x + \rho^2 \beta y = \rho^2 (R^2 - \rho^2)$$

ou, en posant $\rho^2 = \lambda$,

$$\lambda^2 - \lambda(\alpha x - \beta y - R^2) - R^2 \alpha x = 0,$$

droite dont l'enveloppe a pour équation

$$(\alpha x - \beta y - R^2)^2 - 4R^2 \alpha x = 0$$

ou

$$(\alpha x - \beta y)^2 - 2R^2(\alpha x - \beta y) = 0;$$

c'est une parabole P tangente à Ox et Oy aux points A et B où ces axes sont coupés par la tangente au cercle C menée par le point M. L'angle AOB étant droit, le foyer de cette parabole s'obtient, d'après une propriété bien connue, en abaissant du point O une perpendiculaire sur la droite AB; par suite, ce foyer se confond avec le point M. Abaissons du point M les perpendiculaires Ma et Mb sur Ox et Oy; la droite ab joignant les projections du foyer sur deux tangentes à la parabole P est la tangente au sommet de cette courbe.

Donc :

L'enveloppe des polaires du point M *relativement aux coniques* K *est la parabole qui a pour foyer le point* M *et pour tangente au sommet la droite qui joint les projections du point* M *sur les axes* Ox *et* Oy.

Cette parabole est d'ailleurs tangente aux axes, aux points A *et* B *où ils sont coupés par la tangente au cercle* C *menée par le point* M.

2. Le sommet de cette parabole s'obtient en projetant le point M sur la droite ab, mais on a ainsi le point où la droite ab touche son enveloppe, car le segment ab, égal à R, est de longueur constante, et le point M est le centre instantané de rotation correspondant. Il en résulte que la parabole P est tangente à l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement E qui est enveloppée par la droite ab.

Donc :

Toutes les paraboles P, *correspondant aux divers points du cercle* C (*les axes* Ox *et* Oy *restant fixes*), *sont tangentes à l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement* E, *et chacune d'elles touche cette hypocycloïde par son sommet* ([1]).

3. La polaire π du point M, relativement à la conique K, touche au point M′ la polaire réciproque C′ du cercle C par rapport à la même conique.

Or nous avons démontré ([2]) que *le point* M′ *est le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur sa polaire*.

Lors donc que l'on considérera toutes les coniques K du système défini plus haut, on aura le lieu du point M′ en abaissant du point M des perpendiculaires sur les

---

([1]) Nous tenons à dire que la rédaction de cette Note est antérieure à la publication de la Note *Sur quelques courbes enveloppes* de M. Weill (3e série, t. III, p. 377) où se trouve ce même théorème à propos d'autres considerations (Ex. I, 1er cas).

([2]) *Nouvelles Annales*. 3e série, t. II, p. 461.

polaires π correspondantes, c'est-à-dire que le lieu du point M' sera la podaire de l'enveloppe des droites π, par rapport au point M; or nous venons de voir que cette enveloppe est une parabole P de foyer M; la podaire de cette parabole par rapport à son foyer M est la tangente au sommet, c'est-à-dire la droite ab.

Donc :

Le lieu des points où les polaires du point M *supposé fixe, prises par rapport aux coniques* K, *touchent les polaires réciproques du cercle* C *relativement à ces coniques, est la droite qui joint les projections du point* M *sur les axes* Ox *et* Oy.

Nous représenterons cette droite par la lettre D.

4. Ainsi que nous l'avons déjà vu, le segment ab de la droite D, compris entre Ox et Oy, étant constant, *cette droite enveloppe l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement* E.

5. Considérons un des rectangles ci-dessus définis, inscrit dans le cercle C, et la conique K inscrite, comme il a été dit, dans ce rectangle.

A chaque point M du cercle C correspond une droite D définie plus haut, dont l'équation est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1. \tag{2}$$

Le point M' où la polaire de M relativement à K touche la polaire réciproque du cercle C, relativement à K, est, d'après ce qui vient d'être vu, à la rencontre de cette polaire [équation (2)] et de la droite D. Or de (1) et (2) on tire très aisément

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\rho^2}{R^2}.$$

Par suite, *le point* M′, *correspondant à chaque point* M *du cercle* C, *divise le segment ab correspondant dans un rapport constant*. Quand le point M coïncide avec l'un des sommets du rectangle considéré, le point M′ est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le segment *ab* correspondant.

On transforme immédiatement ce théorème en le suivant :

Lorsqu'un segment de droite de longueur égale au rayon du cercle C *glisse entre les axes* Ox *et* Oy, *tous les points de cette droite engendrent des coniques qui sont les polaires réciproques du cercle* C *par rapport aux coniques* K.

6. En projetant les sommets de chaque rectangle inscrit sur leurs polaires, nous obtenons quatre points où la polaire réciproque C′ correspondante touche l'hypocycloïde E définie plus haut.

Donc :

L'enveloppe des polaires réciproques C′ *du cercle* C *par rapport aux coniques* K *est l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement* E *que chaque courbe* C′ *touche en quatre points*.

7. Étant donnés le cercle C et les axes Ox et Oy, au point M correspondent une droite D et une parabole P, définies plus haut.

Si, le point M étant fixe, on fait tourner l'angle droit xOy autour de son sommet O, à chaque position de cet angle correspondent, pour le point M, une droite D et une parabole P.

On voit immédiatement que :

Pour le même point M, *les droites* D *relatives aux diverses positions de l'angle droit* xOy *passent toutes par un même point qui est le milieu du rayon* OM.

De plus, pour le même point M, les paraboles P relatives aux diverses positions de l'angle droit xOy ont toutes *pour foyer le point* M *et sont toutes vues du point* O sous un angle droit.

La polaire du point O par rapport à toutes ces paraboles est invariable; c'est la tangente au cercle C, menée par le point M.

Puisque, pour chacune de ces paraboles, le point M est le foyer et le point O un point de la directrice, la droite élevée perpendiculairement à MO en son milieu N est une tangente.

Donc :

L'enveloppe des paraboles P *est la droite élevée perpendiculairement à* MO *en son milieu* (1).

Cette droite est parallèle à la tangente AB au cercle C.

Nous avons vu que les tangentes au sommet de ces paraboles sont les droites D, et que ces droites D passent toutes par le milieu N de OM; d'ailleurs les sommets s'obtiennent en projetant le foyer M sur les droites D correspondantes; donc :

Pour le même point M, *le lieu des sommets des paraboles* P, *relatives aux diverses positions de l'angle droit* xOy, *est le cercle qui a* MN *pour diamètre.*

8. Étant donnés le point M et une des coniques K,

(1) Cela résout la question 1512 (3e série, t. III, p. 496).

nous avons appelé M′ le point où la polaire du point M par rapport à K touche la polaire réciproque du cercle C par rapport à la même conique.

Le point M étant fixe, supposons alors que la conique K tourne autour de son centre O. A chaque position de cette conique correspond un point M′. Cherchons le lieu de ces points M′.

Nous avons vu que le point M′ est sur la droite D qui joint les projections a et b de M sur les axes Ox et Oy de la conique K, et qu'il divise le segment ab dans un rapport constant. Or, en faisant coïncider le point M avec le point de rencontre des tangentes en deux sommets consécutifs de la conique K, on voit que

$$\frac{a\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'b} = \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2},$$

Y et X étant les demi-axes de la conique K, dirigés suivant Ox et Oy.

Considérons alors le point fixe M et une position quelconque de la conique K qui, d'ailleurs, reste de grandeur constante.

Abaissons sur les axes Ox et Oy les perpendiculaires Ma et Mb; tirons ab et prenons sur cette droite le point M′, tel que

$$\frac{a\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'b} = \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2};$$

les points a et b décrivant le cercle qui a OM pour diamètre et la droite ab passant constamment par le centre N de ce cercle, on voit tout de suite que le lieu du point M′ est un cercle G du centre N.

Donc :

Pour le même point M, *le lieu des points* M′, *relatifs aux diverses positions de la conique* K, *est un cercle* G *dont le centre est au milieu* N *du rayon* OM.

9. Cherchons maintenant l'enveloppe de la polaire π du point M par rapport à la conique K, lorsque cette conique tourne autour de son centre O.

La droite π passe, d'après ce que nous savons, par le point M' et est perpendiculaire à la droite MM'; son enveloppe est donc une courbe dont la podaire relativement au point M est le cercle G; c'est, par conséquent, une conique ayant pour foyers les points M et O, et pour sommets les points où le cercle G coupe la droite MO.

Donc :

Pour le même point M, *l'enveloppe des polaires* π, *relatives aux diverses positions de la conique* K, *est une conique ayant pour foyers les points* O *et* M *et pour sommets les points où le cercle* G *coupe la droite* OM.

On voit immédiatement que les asymptotes de cette conique sont les diamètres du cercle G qui aboutissent aux points de contact de ce cercle et des tangentes à ce cercle issues soit du point O, soit du point M.

10. Nous avons vu (n° 3) que le point M' est à la rencontre de la droite D qui joint les projections de M sur Ox et Oy et de la polaire π de M par rapport à K, et, d'autre part (même numéro), que le point M' est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur π. Il en résulte, d'après la réciproque du théorème de Simson, que le point M est sur le cercle circonscrit au triangle formé par π avec Ox et Oy.

Donc :

Tout point du cercle orthoptique d'une conique est situé sur le cercle circonscrit au triangle formé par la *polaire de ce point relativement à cette conique, avec les axes de la conique.*

On déduit de là que :

Le segment de la polaire d'un point du cercle orthoptique, compris entre les axes de la conique, est vu de ce point sous un angle droit.

11. On sait que toutes les coniques inscrites dans un même quadrilatère sont vues de deux points fixes sous des angles droits.

Donc :

Les cercles orthoptiques de toutes les coniques inscrites dans un même quadrilatère ont même axe radical.

Ce théorème a, croyons-nous, été énoncé par Plücker.

12. Appliquant la méthode des polaires réciproques à un théorème dû à M. Kœnigs ([1]), en prenant pour centre de la transformation le point d'où l'on voit les couples de points en involution, dont il est parlé dans ce théorème, sous des angles droits, nous avons obtenu cet autre théorème :

Si les coniques K *et* H *sont vues du point* A *sous des angles droits, et si* K_1 *est la polaire réciproque de* K *par rapport à* H, *le segment déterminé par* K_1 *sur la polaire du point* A, *par rapport à* H, *est vu de ce point sous un angle droit.*

De là cette propriété du cercle orthoptique .

([1]) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 74

Si deux coniques K *et* H *ont même cercle orthoptique* C, *et si* K_1 *est la polaire réciproque de* K *par rapport à* H, *le segment déterminé par* K_1 *sur la polaire d'un point quelconque de* C *par rapport à* H *est vu de ce point sous un angle droit.*