Nouvelles annales de mathématiques

E. Jaggi

Sur les équations différentielles linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 86-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__86_0>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. E. JAGGI,
Licencié ès sciences mathématiques de la Faculté de Besançon.

Dans son Mémoire sur les équations différentielles linéaires [1], M. Appell a donné une méthode générale pour former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale une fonction entière des intégrales d'une équation donnée. Cette Note a pour objet de donner une méthode pour former l'équation qui admet pour intégrale la fonction

$$u = \frac{y_1 y_2 \ldots y_n}{y_{n+1} y_{n+2} \ldots y_{n+p}}$$

de $p+n$ intégrales de l'équation différentielle

$$(1)\quad F(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + a_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + a_m y = 0.$$

Posons

$$v = y_1 y_2 \ldots y_n,$$
$$w = y_{n+1} y_{n+2} \ldots y_{n+p}.$$

On sait former les équations qui admettent respectivement pour solutions les fonctions v et w. Si l'on désigne par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ un système fondamental de solutions de (1), on peut poser

$$y_k = C_{k1} z_1 + C_{k2} z_2 + \ldots + C_{km} z_m,$$

et l'on voit que v contient un nombre de termes linéai-

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1881.

rement indépendants égal à

$$N = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

L'équation différentielle linéaire $\varphi(v) = 0$ qui donne v est donc d'ordre N.

De même l'équation $\psi(w) = 0$ qui donne w est d'ordre

$$P = \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots p}.$$

Cela posé, ayant formé les équations

$$\varphi_N(v) = 0, \qquad \psi_P(w) = 0,$$

la question revient à former l'équation qui donne

$$u = \frac{v}{w}.$$

On voit qu'il suffit pour cela d'éliminer w entre les deux équations

$$(2) \qquad \psi_P(w) = 0, \qquad \varphi_N(uw) = 0.$$

Pour cela, différentions N — 1 fois la première et P — 1 fois la seconde; nous formons ainsi un système de N + P équations linéaires et homogènes à N + P inconnues

$$w, \quad \frac{dw}{dx}, \quad \frac{d^2 w}{d^2 x}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{N+P-1} w}{dx^{N+P-1}}.$$

Le déterminant Δ de ces équations égalé à zéro sera la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (2) aient une solution commune.

L'équation $\Delta = 0$ est l'équation en u cherchée; c'est une équation non linéaire d'ordre

$$N + P - 1 = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} + \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots p} - 1.$$

Elle admet, bien entendu, comme intégrales non seulement les fonctions telles que

$$u_{np} = \frac{y_1 y_2 \ldots y_n}{y_{n+1} y_{n+2} \ldots y_{n+p}},$$

mais toutes celles obtenues en supposant dans u que

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n+p)$$

fonctions y sont les mêmes.