Nouvelles annales de mathématiques

E. Jaggi

Sur les équations différentielles linéaires sans second membre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 83-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__83_1>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE;

PAR M. E. JAGGI,
Étudiant à la Faculté de Besançon.

Soit

$$(1) \qquad y^{(m)} + P_1 y^{(m-1)} + P_2 y^{(m-2)} + \ldots + P_m y = 0$$

l'équation différentielle linéaire sans second membre la plus générale. Je me propose de donner une méthode pour former l'équation aux produits $u = y_1 y_2$ des intégrales de cette équation.

Soit M l'ordre de cette équation.

Désignons, pour abréger, par S_h^k la somme

$$y_1^{(h)} y_2^{(k)} + y_1^{(k)} y_2^{(h)},$$

en sorte que

$$S_h^k = S_k^h,$$

et convenons en outre que, lorsque $k = h$, on écrira simplement

$$S_h^h = y_1^h y_2^h.$$

Cela posé, dérivons M fois l'équation $u = y_1 y_2$. Nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
u &= S_0^0, \\
u' &= S_1^0, \\
u'' &= S_2^0 + 2S_1^1, \\
u''' &= S_3^0 + 3S_2^1, \\
u^{\text{IV}} &= S_4^0 + 4S_3^1 + 6S_2^2, \\
u^{\text{V}} &= S_5^0 + 5S_4^1 + 10S_3^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u^{\text{M}} &= S_{\text{M}}^0 + \text{M}S_{\text{M}-1}^1 - \frac{\text{M}(\text{M}-1)}{1.2}S_{\text{M}-2}^2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Tout revient à trouver assez d'équations entre les S pour les éliminer.

Or remarquons que y^m est donné en fonction de $y^{m-1}, y^{m-2}, \ldots, y$; y^{m+1} est donné en fonction de y', y'', ..., y^m, c'est-à-dire en fonction de $y, y', y'', \ldots, y^{m-1}$, par une simple différentiation de l'équation (1); et ainsi de suite. On voit ainsi que toutes les quantités S_h^k dans lesquelles l'un des indices au moins est supérieur à $(m-1)$ s'exprimeront en fonction des quantités S_i^j où les deux indices sont inférieurs à m. Les seules inconnues sont donc ces dernières quantités. Leur nombre est $\frac{m(m+1)}{2}$ (i et j varient tous deux de o à $m-1$). Il faudra donc que le système (2) contienne $\frac{m(m+1)}{2}+1$ équations pour éliminer les S_i^j.

Par suite, il faudra prendre $\text{M} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Les équations (2) étant alors écrites et ne contenant que les S_i^j, où i et j sont inférieurs ou égaux à $m-1$, l'élimination de ces quantités se fera immédiatement, car il est facile de voir que les équations sont linéaires. Le résultat se présentera donc sous la forme d'un déterminant de $(\text{M}+1)^2$ éléments dans lequel les $u, u', \ldots, u^{\text{M}}$

n'entreront que comme éléments de la première colonne; par conséquent on peut énoncer ce théorème:

Les produits deux à deux des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre m sans second membre sont solutions d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $\frac{m(m+1)}{2}$.

Ce qui précède donne le moyen de former cette équation.

Remarque. — Sachant que les produits $u = y_1 y_2$ peuvent être donnés par une équation différentielle, on vérifie facilement que cette équation admet comme solutions les carrés des y, ce qui devait être *a priori*; je dis que, réciproquement, si l'on peut amener l'équation en y^2 à être linéaire, on aura l'équation en $y_1 y_2$.

En effet, soit

$$u = y_1 y_2.$$

Je dis que u est racine de l'équation linéaire en y^2. Posons

$$y = y_1 + y_2,$$

on a

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2u;$$

y^2, y_1^2, y_2^2 sont solutions de l'équation linéaire, donc $2u$ et par suite u en est aussi une solution.

Or il est facile de voir que l'équation en y^2 se présente immédiatement avec l'ordre m sous forme rationnelle et entière, mais non linéaire. Il faudra donc différentier $\frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}$ fois pour arriver à l'équation linéaire en u. Ceci donne un second moyen de former l'équation cherchée.