NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur les lignes de poursuite

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 65-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__65_0>

SUR LES LIGNES DE POURSUITE;

PAR M. E. CESARO.

1. Dans les tracés graphiques, relatifs à la construction des voûtes, alors que l'on cherche à déterminer la poussée due à un ensemble de voussoirs, on rencontre une intéressante déduction de lignes, que nous voulons examiner de près, en nous plaçant à un point de vue abstrait et général. Un point M se meut, dans le plan, suivant une trajectoire quelconque : soit s le chemin parcouru depuis le point fixe A. Ayant désigné par q une fonction de s, déposons en chaque point M, sur l'élément ds, une masse $q\,ds$, et appelons respectivement Q et M_0 la *résultante* et le *centre de gravité* des masses appliquées le long de l'arc AM. Il s'agit d'étudier les rapports existant entre les lignes (M) et (M_0). Tout ce que nous allons dire s'étend, fort naturellement, aux lignes *non planes :* alors (M) doit être considérée comme une ligne quelconque, tracée sur la surface développable dont (M_0) est l'arête de rebroussement; mais, pour plus de simplicité, nous raisonnerons exclusivement sur des lignes planes.

2. Ayant le point M_0, correspondant à M, si l'on veut le point M'_0, correspondant au point M', infiniment voisin de M, on sait qu'il faut prendre, sur M_0M', le point qui partage ce segment dans le rapport $q\,ds$ à Q. Il en résulte que M_0 *est constamment dirigé vers* M, *et que le rapport des vitesses des deux mobiles* est

$$K = \frac{ds_0}{ds} = \frac{qr}{Q}, \tag{1}$$

où r désigne la distance MM_0. Ainsi (M_0) est une *ligne de poursuite,* relativement à (M). Il est évident, en outre, que, dans tout mouvement de poursuite, les deux trajectoires peuvent être regardées comme ayant entre elles des relations analogues à celles des lignes (M), (M_0); car, le rapport des vitesses étant donné, l'intégration de l'égalité (1) fait connaître, à chaque instant, la valeur de la fonction Q, et, par suite, celle de la masse unitaire q. En d'autres termes, tout mobile, qui en poursuit un autre, peut être *généralement* considéré comme étant, à un moment quelconque, le centre de gravité du chemin parcouru par le mobile poursuivi, ce chemin étant supposé *matérialisé* suivant une certaine loi.

3. Soient respectivement ε_0 et ρ_0 l'*angle de contingence* et le *rayon de courbure* de la ligne (M_0), au point M_0. Le triangle M_0MM' donne

$$\frac{ds}{\varepsilon_0} = \frac{r}{\sin(\theta - \varepsilon_0)} = \frac{r + dr + ds_0}{\sin\theta}, \tag{2}$$

θ étant l'*angle des directions* suivies par les deux mobiles. On déduit de là

$$\rho_0 = \frac{Kr}{\sin\theta}, \qquad \frac{d(r + s_0)}{ds} = \cos\theta. \tag{3}$$

Si l'on observe, en outre, que la différence $\varepsilon - \varepsilon_0$ des angles de contingence, en deux points correspondants, n'est autre chose que $d\theta$, on a

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{K}{\rho_0}. \tag{4}$$

Ces formules sont suffisantes pour l'étude des lignes de poursuite. On peut leur adjoindre la relation

$$\cos\theta = 2K + Q\frac{d}{ds}\frac{K}{q}, \tag{5}$$

qu'il est aisé d'obtenir par une transformation simple de (3).

4. Il est vrai que, dans tout ceci, nous avons pris M'_0 entre M_0 et M, ce qui caractérise le mouvement de *poursuite,* proprement dit; mais les formules précédentes sont évidemment applicables à un mouvement de *fuite,* pourvu que l'on remplace ds_0 par $-ds_0$, dans (1) et (3), et, par suite, que l'on change le signe de K, dans (2) et (4). De plus, θ représente le *supplément* de l'angle des vitesses. Un exemple remarquable nous est fourni par la *développée* de la ligne (M), répondant au cas où θ est constamment égal à $\frac{\pi}{2}$. Les formules (2), (3), (4), modifiées comme il vient d'être dit, donnent immédiatement les égalités connues

$$\rho = r = s_0, \qquad \rho_0 = \rho \frac{d\rho}{ds}.$$

Puis, tenant compte de ces relations, l'égalité (1) donne facilement, à moins d'un facteur constant,

$$Q = \frac{1}{\rho}, \qquad q = \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = -\frac{\rho_0}{\rho^3}.$$

On voit par là que, dans le cas d'une développée, chaque élément doit être chargé proportionnellement à la variation subie par la courbure, le long de l'élément considéré.

5. De la même trajectoire (M) déduisons une ligne de poursuite (M_1), répondant à la condition, plus générale, de θ *constant.* Elle est, suivant la dénomination proposée par Lancret, une *développoïde* de (M). Au moyen des formules ci-dessus, on trouve immédiate-

ment

$$r_1 = \rho \sin\theta, \qquad s_1 = \rho \sin\theta - s\cos\theta, \qquad \rho_1 = \rho\,\frac{ds_1}{ds}.$$

La première égalité prouve que M_1 appartient à la circonférence décrite sur MM_0 comme diamètre : ce théorème est dû à Réaumur. La deuxième égalité donne la longueur de l'arc de développoïde : rectifié sur MM_1, il est compris entre M_1 et la projection, sur MM_1, du point N, correspondant à M, sur la *développante* de (M). Pour que la ligne (M_1) se réduise à un *point,* il faut et il suffit que s_1 soit constamment nul, et, par suite, que l'on ait

$$(6) \qquad \rho = s\cot\theta.$$

Mais alors la ligne (M), rencontrant les rayons issus de M_1, sous l'*angle constant* θ, n'est autre chose qu'une *spirale logarithmique,* de pôle M_1. Il résulte qu'une telle courbe est *caractérisée* par l'équation (6).

6. Au moyen de la deuxième égalité, la troisième devient

$$\rho_1 = \rho_0 \sin\theta - \rho\cos\theta.$$

Cette formule, due à Minich, retrouvée par M. Habich, montre que les centres de courbure des développoïdes appartiennent à la circonférence décrite sur le rayon de courbure de la développée. Ceci prouve, de plus, que la développoïde, sous l'angle θ, de la développée d'une ligne quelconque, ne diffère pas de la développée de la développoïde, sous le même angle, de la ligne considérée. C'est là un cas particulier du théorème de Lancret, d'après lequel on peut, dans la recherche des développoïdes successives, sous différents angles, d'une ligne donnée, intervertir l'ordre des déductions, sans altérer la dernière développoïde.

7. Lorsque la ligne (M) est donnée par son *équation intrinsèque*

$$F(\rho, s) = 0,$$

on a l'équation de sa développoïde, sous l'angle θ, en éliminant ρ et s entre l'égalité qui précède et les égalités

$$\rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds} \sin\theta - \rho\cos\theta, \qquad s_1 = \rho\sin\theta - s\cos\theta,$$

obtenues plus haut. Considérons, par exemple, l'équation

$$(7) \qquad \rho^2 = 2Rs,$$

qui représente une *développante de cercle*. L'élimination indiquée donne l'équation

$$\rho_1^2 = R^2\sin^2\theta - 2Rs_1\cos\theta,$$

réductible à la forme (7), par le changement de s_1 en $\frac{R}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - s_1$. Ainsi les développoïdes d'une développante de cercle sont autant de développantes. Ce résultat est presque évident.

8. On sait, d'ailleurs, que, plus généralement, en vertu du théorème de M. Fouret, la développoïde d'une courbe *cycloïdale* est une courbe *semblable*. Bien que ce théorème ait été démontré, fort simplement, par M. Rouquet, dans les *Nouvelles Annales*, et par M. Mansion, dans la *Nouvelle Correspondance*, nous voulons en donner une autre démonstration, basée exclusivement sur les formules qui précèdent. Dans ce but, il est utile d'observer, avant tout, que, si la ligne (M) est donnée par les équations

$$\rho = \varphi(t), \qquad s = \psi(t),$$

les équations de sa développoïde, sous l'angle θ, sont

$$\rho_1 = \frac{\varphi(t)}{\psi'(t)} [\varphi'(t)\sin\theta - \psi'(t)\cos\theta],$$
$$s_1 = \varphi(t)\sin\theta - \psi(t)\cos\theta.$$

Or on sait que l'équation intrinsèque, générale, des courbes cycloïdales, est

$$a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2,$$

l'origine des arcs étant également éloignée de deux points de rebroussement consécutifs. Rappelons que, lorsque a et b varient, en conservant un *rapport constant*, il en est de même des rayons des cercles générateurs, de sorte que la courbe reste *semblable* à elle-même. Cela posé, à l'équation ci-dessus on peut substituer les suivantes :

$$\rho = b\sin t, \qquad s = a\cos t.$$

Les équations de la développoïde, sous l'angle θ, sont donc

$$\rho_1 = -\frac{b}{a}(b\sin\theta\cos t + a\cos\theta\sin t),$$
$$s_1 = b\sin\theta\sin t - a\cos\theta\cos t.$$

Enfin l'élimination de t donne

$$a_1^2\rho_1^2 + b_1^2 s_1^2 = a_1^2 b_1^2,$$

pourvu que l'on pose

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \sqrt{\cos^2\theta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta}.$$

Le théorème de M. Fouret est démontré. Le radical représente aussi le *rapport de similitude* des deux courbes. En y supposant θ variable, on voit que *les diamètres générateurs de toutes les développoïdes sont en raison inverse des diamètres d'une ellipse*. Les axes de cette ellipse sont les diamètres des cercles générateurs de la courbe et de sa développée. Dans le cas de la *cycloïde,* l'ellipse devient un cercle, et toutes les développoïdes sont *égales* à la courbe primitive.

9. Parmi les points M_1, correspondant à M, sur les différentes développoïdes, il en est un, P, qui constitue, pour la courbe correspondante, un point de rebroussement. D'après les constructions indiquées plus haut, il est à l'intersection des circonférences décrites sur les rayons de courbure de (M) et de sa développée, pris comme diamètres. Il est donc, dans le triangle rectangle ayant pour côtés ces rayons de courbure, la projection du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. La développoïde, à laquelle appartient le point P, sépare toutes les développoïdes en deux classes, suivant qu'elles sont ou ne sont pas des lignes de poursuite proprement dites. Il est intéressant d'étudier le lieu (P), que l'on peut appeler la *ligne de rebroussement* de (M). Voici des exemples :

a. On a vu que *la ligne de rebroussement d'une spirale logarithmique se réduit à un point.*

b. Si (M) est une *développante de cercle,* la ligne (M_0) est, par définition, une circonférence : soient R son rayon, et O son centre. Construisons le triangle OMM_0, rectangle en M_0 et projetons M_0 sur OM : cette projection est le point cherché P. Or nous voyons que

$$OP.OM = R^2.$$

La ligne (P) est donc *inverse* de la développante, par rapport au cercle directeur. Conséquemment, elle est, comme l'a fait remarquer M. Neuberg, une *tractrice polaire.* Ainsi : *la ligne de rebroussement d'une développante de cercle est une tractrice polaire.*

c. Si (M) est une *cycloïde*, on sait que l'hypoténuse du triangle des rayons de courbure est perpendiculaire à la *base* de la courbe, et que celle-ci divise MM_0 en deux parties égales. Il en résulte que P est le symétrique de M, par rapport à la base. Conséquemment : *la ligne de rebroussement d'une cycloïde est une autre cycloïde, symétrique de la première par rapport à la base.*

10. Nous avons, du reste, des formules générales, qui permettent de chercher l'équation intrinsèque de (P), connaissant celle de (M). Prenons comme axes la normale et la tangente à (M), au point M, en les dirigeant de telle sorte que les coordonnées x, y de P soient positives. Soit

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{d\rho}{ds}, \qquad u = \rho \cos \omega.$$

Les constructions nécessaires pour obtenir le point P montrent que u et ω sont les coordonnées polaires de ce point et, par suite, que

$$x = u \cos \omega, \qquad y = u \sin \omega.$$

Lorsque M et P passent aux positions infiniment voisines, *en entraînant les axes*, les coordonnées du second point subissent les variations

$$\begin{cases} \Delta x = \cos \omega \, du - u \sin \omega \, d\omega = \cos^2 \omega \, d\rho - \rho \sin 2\omega \, d\omega, \\ \Delta y = \sin \omega \, du + u \cos \omega \, d\omega = \sin \omega \cos \omega \, d\rho + \rho \cos 2\omega \, d\omega. \end{cases}$$

Les formules pour le changement d'axes montrent immédiatement que les variations des coordonnées de P, *par rapport aux anciens axes*, sont

$$dx = \Delta x - \varepsilon y, \qquad dy = \Delta y + \varepsilon x - ds.$$

Si l'on observe que

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho_0},$$

les dernières égalités deviennent

$$(8) \qquad dx = -\rho \sin 2\omega \, d\omega, \qquad dy = \rho \cos 2\omega \, d\omega.$$

On en déduit, en premier lieu,

$$\frac{dy}{dx} = -\cot 2\omega.$$

Par conséquent : *les tangentes à une courbe et à sa ligne de rebroussement, en deux points correspondants, sont également inclinées sur la droite qui joint ces points.*

11. Si l'on a égard à ce théorème, la simple considération de la figure montre que l'angle de contingence de (P) est $\varepsilon + 2d\omega$. D'autre part, en élevant au carré et en ajoutant les égalités (8), on voit que l'élément linéaire de la même courbe est, au signe près,

$$(9) \qquad ds' = \rho \, d\omega.$$

Il en résulte que le rayon de courbure de (P) est donné par la formule

$$\rho' = \frac{\rho \, d\omega}{2d\omega + \varepsilon} = \frac{\rho^2}{2\rho + \dfrac{ds}{d\omega}}.$$

Or nous avons

$$\omega = \text{arc tang}\,\frac{d\rho}{ds}, \qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{\dfrac{d^2\rho}{ds^2}}{1 + \left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2},$$

pourvu que l'on prenne s comme *variable indépen-*

dante. Donc enfin

$$(10)\qquad \rho' = \frac{\rho^2 \dfrac{d^2\rho}{ds^2}}{1 + \left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2 + 2\rho \dfrac{d^2\rho}{ds^2}}.$$

12. Les formules (9) et (10) sont suffisantes pour la recherche de l'équation intrinsèque de (P). Il faut, pour cela, éliminer ρ et s entre l'équation de (M), la relation (10), et l'égalité qui résulte de l'intégration de (9). Voici des exemples :

a. Une *développante de cercle* est représentée par l'équation (7). Dans ce cas, les formules (9) et (10) donnent

$$\rho' = \frac{R^2\rho}{R^2 - \rho^2}, \qquad s' = R \log \frac{\sqrt{\rho^2 + R^2}}{R}.$$

Éliminons ρ, et supprimons les accents. Il vient

$$\rho = R \frac{\sqrt{e^{\frac{2s}{R}} - 1}}{2 - e^{\frac{2s}{R}}}.$$

C'est l'équation d'une *tractrice polaire*.

b. L'équation intrinsèque de la *chaînette* est

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}.$$

La formule (10) devient

$$\rho' = \frac{2\rho^2}{8\rho - 3a}.$$

D'autre part, l'intégration de (9) donne

$$s' = \frac{a}{4}\left(\frac{2s}{a} + 3 \operatorname{arc\,tang} \frac{2s}{a}\right).$$

L'élimination de ρ et s, entre ces trois égalités, conduit à une équation compliquée.

c. Mais il y a des lignes qui sont, à un certain point de vue, plus générales que la chaînette : on peut les appeler *alysoïdes*. Ce sont les développées des courbes dont l'équation générale est

$$\rho = c\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

Pour $c = a$, cette équation représente une *tractrice,* ou méridienne de la *pseudosphère :* la développée est, alors, une chaînette. Si la grandeur c reste quelconque, on trouve que l'équation de la développée est

$$a\rho = s^2 + c^2.$$

Telle est l'équation générale des alysoïdes. Parmi ces courbes il y en a une qui est fort remarquable : elle répond au cas de $c = \frac{a}{2}$. Alors les formules (9) et (10) deviennent

$$\rho' = \frac{\rho}{4}, \qquad s' = \frac{s}{2},$$

de sorte que *la ligne de rebroussement de cette alysoïde particulière est une autre alysoïde*. Les formules générales, appliquées au cas actuel, permettent d'affirmer, en outre, que *le point de rebroussement, relatif à un point quelconque de l'alysoïde considérée, se trouve à une distance constante de la tangente à la courbe. Sa distance à la normale est égale à la longueur de la courbe, comptée à partir du sommet.*

d. La courbe dont il vient d'être question est loin d'être *caractérisée* par les propriétés énoncées. Il y a, par exemple, la ligne représentée par l'équation

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

qui jouit de propriétés analogues. On trouve, en effet,

$$\rho' = \frac{\rho}{3}, \qquad s' = s.$$

L'équation de la ligne de rebroussement est donc

$$\rho = \frac{a}{6}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

En outre, *la distance de tout point, au point de rebroussement, qui lui correspond, est constante.* On pourrait rechercher, plus généralement, quelles sont les lignes pour lesquelles

$$\rho' = \frac{\rho}{\alpha}, \qquad s' = \frac{s}{\beta}.$$

Par nos formules, le problème est réduit à une simple intégration. Sans le résoudre, nous dirons que l'on doit avoir nécessairement $\alpha - \beta = 2$. Ainsi, dans les deux cas particuliers traités, nous avions

$$\alpha = 4, \qquad \beta = 2; \qquad \alpha = 3, \qquad \beta = 1.$$

13. Pour terminer ces remarques sur la théorie des développoïdes, observons que l'égalité (1) devient

$$\frac{dQ}{Q} + \frac{d\rho}{\rho} = \varepsilon \cot\theta.$$

Par conséquent, si l'on appelle E l'angle des tangentes aux extrémités de l'arc AM ou, avec plus de précision, la déviation angulaire totale du mobile M, on trouve, à moins d'un facteur constant,

$$Q = \frac{e^{E\cot\theta}}{\rho}, \qquad q = -\frac{\rho_1}{\rho^3}\frac{e^{E\cot\theta}}{\sin\theta}.$$

14. Revenons à l'étude du mouvement de poursuite, proprement dit. Parmi les différentes formes que l'on peut donner à q, il y en a quelques-unes qui présentent un certain intérêt; mais nous ne nous y arrêterons pas. Ainsi, pour $q = \frac{1}{\rho}$, chaque élément se trouve chargé proportionnellement à l'angle de contingence correspondant, de sorte que le point M_0 est, suivant la dénomination employée par Steiner, le *barycentre de courbure* de l'arc AM. Alors Q n'est autre chose que E. Pour $q = 1$, le point M_0 est, tout simplement, le *centre de gravité* de l'arc AM. Dans ce cas $Q = s$, et les formules trouvées plus haut deviennent

$$K = \frac{ds_0}{ds} = \frac{r}{s}, \qquad \rho_0 = \frac{r^2}{s \sin\theta}, \qquad \cos\theta = 2K + s\frac{dK}{ds}.$$

Elles expriment autant de théorèmes que nous avons eu l'occasion d'énoncer ailleurs. En particulier, ayant projeté N en N′ sur la normale à (M_0), la deuxième formule montre que le centre de courbure de (M_0) se trouve sur la perpendiculaire à MN′, menée par M.

15. *Y a-t-il des trajectoires telles que le centre de gravité du chemin parcouru se déplace avec une vitesse proportionnelle à celle du mobile même?* — Des trois dernières formules, la troisième montre que, pour une telle trajectoire, θ *doit être constant*, ce qui réduit l'équation (4) à $\rho_0 = K\rho$. D'ailleurs, la première formule donne $r = Ks$. Substituant ces deux valeurs, dans la deuxième formule, on obtient

$$\rho = \tfrac{1}{2} s \cot\theta.$$

C'est l'équation intrinsèque de la ligne cherchée. Par comparaison avec (6), on voit que la trajectoire est une *spirale logarithmique,* rencontrant ses rayons vecteurs sous un angle dont la tangente est double de celle de θ.

16. Reprenons les relations (2), (3), (4). On peut en déduire, par l'élimination de θ, d'autres formules importantes. En effet, en tenant compte de (3), la formule (2) devient

$$(11) \qquad \rho_0 = \frac{\mathrm{K}r}{\sqrt{1-\left(\mathrm{K}+\frac{dr}{ds}\right)^2}}.$$

Au contraire, si l'on a égard à (2), la différentiation de (3) donne la valeur de $\frac{d\theta}{ds}$; en la substituant dans (4), et en tenant compte de (11), nous parvenons à l'importante formule

$$(12) \qquad \rho = \frac{r\sqrt{1-\left(\mathrm{K}+\frac{dr}{ds}\right)^2}}{1-\left(\mathrm{K}+\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(\frac{d\mathrm{K}}{ds}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)},$$

qui sert à la recherche des trajectoires, remplissant certaines conditions.

17. *Quelles sont les lignes, pour lesquelles la masse unitaire q varie proportionnellement au rapport des vitesses?* — En vertu de (1), cela revient à demander : *Quelles sont les lignes pour lesquelles la masse résultante* Q *varie proportionnellement à la distance des mobiles?* — La formule (5) montre immédiatement que, pour ces lignes, $\cos\theta = 2\mathrm{K}$, c'est-à-dire que *la composante de la vitesse du mobile poursuivi, suivant la direction de l'autre mobile, est le double de la vitesse de celui-ci*. Pour trouver l'équation intrinsèque de ces trajectoires, employons la relation (11), en y supposant $r = \mathrm{CQ}$. Nous avons d'abord

$$(13) \qquad \mathrm{K} = \frac{ds_0}{ds} = \mathrm{C}q = \frac{dr}{ds}.$$

Les formules (11) et (12) deviennent donc

$$(14)\qquad \rho_0 = \frac{r\dfrac{dr}{ds}}{\sqrt{1-4\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2}},$$

$$(15)\qquad \rho = \frac{r\sqrt{1-4\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2}}{1-4\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 - 2r\dfrac{d^2r}{ds^2}}.$$

Si, par exemple, r est donné en fonction de s, la relation (15) est l'équation intrinsèque de la trajectoire (M). De même, l'équation (14) représente la ligne (M_0), pourvu qu'on y remplace s en fonction de s_0, ce qui est aisé, puisque, d'après (13), s_0 ne diffère pas de r.

18. Pour montrer une application de ces formules, prenons

$$r = \frac{R}{2}\sin\frac{s}{R}.$$

Comme nous pouvons librement disposer de la constante C, nous la ferons égale à $\frac{1}{2}$, et nous aurons

$$Q = R\sin\frac{s}{R}, \qquad q = \cos\frac{s}{R}.$$

Les formules (14) et (15) deviennent

$$\rho_0 = \frac{R}{4}\cos\frac{s}{R}, \qquad \rho = \frac{R}{3}.$$

D'après la dernière égalité, la ligne (M) est une *circonférence,* de rayon $\frac{R}{3}$. Quant à la première, observons que, à cause de $r = s_0$, on a

$$\cos\frac{s}{R} = \frac{4}{R}\rho_0, \qquad \sin\frac{s}{R} = \frac{2}{R}s_0,$$

et, par suite,

$$4\rho_0^2 + s_0^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Or on sait que l'équation intrinsèque

$$a^2\rho^2 + b^2 s^2 = a^2 b^2$$

représente, pour $a > b$, une *épicycloïde*, engendrée par le roulement d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}$, sur un cercle de rayon $\frac{ab^2}{a^2-b^2}$. Dans le cas actuel,

$$a = \frac{R}{2}, \qquad b = \frac{R}{4},$$

et les rayons des deux circonférences, *roulette* et *base*, sont respectivement $\frac{R}{12}$ et $\frac{R}{6}$. Remarquons encore que, d'après (13),

$$K = \frac{1}{2}\cos\frac{s}{R} = \frac{1}{2}\cos\theta,$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{1}{3}\widehat{AOM},$$

A étant l'origine des arcs, sur la circonférence (M), et O le centre de celle-ci. En résumé, ayant tracé la circonférence (M), on déterminera M_0 en prenant, au *tiers* de l'arc AM, le point M'; puis, au *quart* de M'M, le point cherché M_0. Le lieu de M_0, coïncidant avec l'enveloppe de M'M, est une épicycloïde à deux rebroussements, situés sur le diamètre perpendiculaire à OA. Si, en chaque point M, on charge l'élément ds proportionnellement à sa projection sur M'M, le centre de gravité de l'arc AM, ainsi chargé, est M_0, et la masse résultante est proportionnelle à la distance MM_0.

19. Nous terminerons cette Note en signalant la corrélation remarquable existant entre (M_0) et (M). La ligne (M) est la *trajectoire d'un point,* qui *se meut sur une droite,* pendant que celle-ci *enveloppe* (M_0). Corrélativement, la ligne (M_0) est l'*enveloppe d'une droite,* qui *tourne autour d'un point,* pendant que celui-ci *décrit* (M). A ce point de vue, on peut se demander, par exemple, quelle théorie doit être considérée comme correspondant, par dualité, à celle des *développoïdes.* Il suffit, évidemment, de supposer que, au lieu de l'*angle des vitesses,* ce soit la *distance des deux mobiles,* qui se conserve *constante.* Étant donnée une ligne (M_0), on en déduira, de cette manière, une infinité de lignes (M), suivant la valeur attribuée à la constante r. Pour une quelconque de ces lignes, les formules (2) et (3) donnent

$$r = \rho_0 \operatorname{tang} \theta, \tag{16}$$

d'où il résulte que les normales aux différentes lignes passent par le centre de courbure de (M_0), et, par conséquent, que *les tangentes enveloppent, à chaque instant, une parabole.* Ce théorème est fort connu en Cinématique, et nous ne le citons que pour le comparer au théorème de *Réaumur,* dont il est le corrélatif. Tous les autres résultats de la théorie des mouvements plans sont renfermés dans les formules générales (2), (3), (4). Ainsi l'on démontre facilement, au moyen de ces formules, que *les centres de courbure des trajectoires considérées se trouvent, à chaque instant, sur une conique.* En effet, la dérivation logarithmique de (16) nous donne, d'abord

$$d\theta = -\sin\theta\cos\theta\,\frac{d\rho_0}{\rho_0};$$

d'où, en désignant par ρ_1 le *rayon de courbure de la développée* de (M_0), nous déduisons

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\rho_0^2}\,\rho_1.$$

Ce résultat, substitué dans (4), conduit à l'égalité cherchée

$$\rho = \frac{\rho_0^2}{(\rho_0 - \rho_1 \sin\theta \cos\theta)\cos\theta}.$$

Maintenant il est aisé d'obtenir l'équation du lieu des centres de courbure. En prenant respectivement comme axes des x et des y les normales à (M_0) et à sa développée, on trouve l'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{\rho_1}{\rho_0} xy - \rho_1 y = 0,$$

facile à discuter.

20. Dans les applications du principe de dualité à des questions géométriques, *non projectives*, on voit surgir bien des difficultés. Cela doit arriver inévitablement, puisque, dans la Géométrie *euclidienne*, telle que l'expérience inconsciemment acquise nous l'a fait établir, les modes de mesure des *angles* et des *distances* ont des bases essentiellement diverses. Ainsi l'on se demandera avec raison comment il peut se faire que la *parabole, enveloppe instantanée* des tangentes aux trajectoires des *points d'une droite mobile,* corresponde, par dualité, à la *circonférence, lieu instantané* des points de contact des *droites d'un faisceau mobile*. Il est vrai que la dualité existe dans les modes de génération ; mais elle cesse d'être visible dans les propriétés des lignes engendrées. De même, sous beaucoup de points de vue, la *spirale logarithmique* correspond, par dualité, à la *tractrice*. La première ligne admet le *point* parmi ses développoïdes : les autres développoïdes *sont des spirales*. Dans la déduction corrélative, une tractrice admet la *droite* parmi les lignes qui en dérivent ; mais les autres lignes dérivées *ne sont pas des tractrices*. Ce qui vient

gâter entièrement la corrélation dont il s'agit est la non-existence du théorème de *Lancret*, transformé d'après le principe de dualité. Aussi nous proposons-nous de reprendre l'étude des lignes de poursuite, en utilisant les idées et les formules de la *Géométrie générale*, qui ramènent les moyens de mesure à de simples opérations projectives, de manière à rétablir, dans toute sa perfection, le principe de dualité.