NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESBOVES

Résolution, en nombres entiers et sous sa forme la plus générale, de l'équation cubique, homogène, à trois inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 545-579

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__545_0>

RÉSOLUTION, EN NOMBRES ENTIERS ET SOUS SA FORME LA PLUS GÉNÉRALE, DE L'ÉQUATION CUBIQUE, HOMOGÈNE, A TROIS INCONNUES [1];

PAR M. DESBOVES.

1. *Notations.* — L'équation générale peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &aX^3+bY^3+cZ^3+dXYZ+eYZ^2\\ &\qquad +fZY^2+gXZ^2+hZX^2+kXY^2+lYX^2=0;\end{aligned}\right.$$

(x, y, z) en étant une solution quelconque, on représentera le résultat de la substitution de x, y, z dans son premier membre par $F(x, y, z)$ ou plus simplement F; nous poserons aussi, comme Cauchy,

$$\frac{dF}{dx}=\varphi,\qquad \frac{dF}{dy}=\chi,\qquad \frac{dF}{dz}=\psi.$$

De plus, si l'on remplace dans F, φ, χ et ψ, les variables x, y, z respectivement : 1° par $0, \psi, -\chi$; 2° par $-\psi, 0, \varphi$; 3° par $\chi, -\varphi, 0$, les résultats correspondants seront représentés par $F_1, \varphi_1, \chi_1, \psi_1$; $F_2, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$; $F_3, \varphi_3, \chi_3, \psi_3$. On pose encore

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\psi^2-\frac{2d^2F}{dy\,dz}\chi\psi+\frac{d^2F}{dz^2}\chi^2\right),$$

$$\mu=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\psi^2-\frac{2d^2F}{dx\,dz}\varphi\psi+\frac{d^2F}{dz^2}\varphi^2\right),$$

$$\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\chi^2-\frac{2d^2F}{dx\,dy}\varphi\chi+\frac{d^2F}{dy^2}\varphi^2\right).$$

[1] Cet article peut être considéré comme un complément du Mémoire de Cauchy sur la même question : seulement, pour que le sujet fût complètement traité, j'ai reproduit deux systèmes de formules trouvées par l'illustre géomètre, mais en simplifiant les démonstrations.

2. Nous allons d'abord, comme le fait Cauchy, résoudre le problème suivant :

Problème I. — *Connaissant une première solution* (x, y, z) *de l'équation* (1), *trouver des formules qui fassent connaître une seconde solution* (X, Y, Z).

ρ, u, v, t étant des variables quelconques, on pose

$$(2)\qquad X = x\rho + u, \qquad Y = y\rho + v, \qquad Z = z\rho + t.$$

Alors, si l'on substitue dans l'équation (1) pour X, Y, Z les expressions précédentes et que l'on développe le premier membre, d'après le théorème de Taylor, en considérant u, v, t comme les accroissements, on a

$$\begin{aligned}F(x, y, z)\rho^3 &+ \left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)\rho^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^{(2)} + F(u, v, t) = 0\end{aligned}$$

ou, comme (x, y, z) est une solution de l'équation (1),

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)\rho^2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}\rho + F(u, v, t) = 0.\end{aligned}\right.$$

On peut réduire l'équation précédente à une équation du premier degré en ρ en égalant à zéro le coefficient de ρ^2, ce qui permet d'exprimer l'une des variables u, v, t en fonction des deux autres; mais le calcul peut être simplifié en réduisant les trois variables à deux seulement, comme je l'ai fait pour les équations du second degré [1]. Supposons, par exemple, $u = 0$: alors l'équa-

---

[1] *Voyez* le Mémoire inséré dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. III, 1884).

tion (3) devient

$$(4)\quad \left(\frac{dF}{dy}v+\frac{dF}{dz}t\right)\rho^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dy}v+\frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}\rho+F(o,v,t)=o.$$

Or, en égalant à zéro le coefficient de ρ^2 dans l'équation précédente, puis la résolvant par rapport à ρ, on a

$$t=-\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}}v,\qquad \rho=-\frac{F(o,v,t)}{\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dy}v+\frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}},$$

et, en remplaçant dans la seconde des équations précédentes t par sa valeur tirée de la première, si l'on se sert des notations (1), on obtient

$$\rho=-\frac{vF_1}{\frac{1}{2}\psi\left(\frac{d\chi}{dy}\psi^2-2\frac{d\chi}{dz}\chi\psi+\frac{d\psi}{dy}\chi^2\right)}$$

ou encore

$$\rho=-\frac{vF_1}{\psi\lambda}.$$

Si l'on substitue maintenant cette valeur de ρ dans les formules (2) où l'on a fait $u=o$, il vient

$$(5)\qquad X=xF_1,\qquad Y=yF_1-\psi\lambda,\qquad Z=zF_1+\chi\lambda.$$

Si l'on fait ensuite successivement $v=o$ et $t=o$ dans les formules (2), on aura deux systèmes de formules qui donneront les mêmes solutions que le premier; ce sont les suivantes :

$$(6)\qquad X=xF_2+\psi\mu,\qquad Y=yF_2,\qquad Z=zF_2-\varphi\mu;$$
$$(7)\qquad X=xF_3-\chi\nu,\qquad Y=yF_3+\varphi\nu,\qquad Z=zF_3.$$

Remarque I. — On a les identités

$$(8)\qquad \begin{cases} x\varphi_1+y\chi_1+z\psi_1=\lambda,\\ x\varphi_2+y\chi_2+z\psi_2=\mu,\\ x\varphi^3+y\chi^3+z\psi^3=\nu.\end{cases}$$

En effet, x, y, z étant trois variables quelconques et u, v, t trois autres variables remplaçant, respectivement, dans F, x, y, z, on a identiquement

$$x\frac{dF}{du}+y\frac{dF}{dv}+z\frac{dF}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u+\frac{dF}{dy}v+\frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}.$$

Or, si dans cette identité on remplace u, v, t respectivement par $0, \frac{dF}{dz}, -\frac{dF}{dy}$, on a la première des égalités (8); les deux autres se démontrent de même. On peut donc dans les formules (5), (6) et (7) remplacer λ, μ, ν par les premiers membres des équations (8). On obtient ainsi les formules de Cauchy, telles qu'il les a données; mais, comme on le verra par la suite, la forme que nous avons adoptée est préférable.

Remarque II. — (x, y, z) étant une première solution de l'équation (1), une seconde solution (X, Y, Z) satisfait à l'équation

$$X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}=0. \tag{9}$$

En effet, si l'on multiplie les deux membres des équations (2), respectivement par $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$, il vient

$$\begin{aligned}X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}\\ =\left(x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}\right)\rho+u\frac{dF}{dx}+v\frac{dF}{dy}+t\frac{dF}{dz}.\end{aligned}$$

Or le premier terme du second membre est nul à cause de l'homogénéité de F, et le second terme est aussi nul parce que le coefficient de ρ^2 dans l'équation (3) est égal à zéro, que l'une des variables u, v, t soit ou non égale à zéro.

3. Les seconds membres des équations (5), (6) et (7)

sont des polynômes du septième degré en x, y, z; mais nous allons démontrer qu'on peut remplacer les trois systèmes par un système équivalent qui donne **X**, **Y**, **Z** exprimés par des polynômes du quatrième degré en x, y, z. Pour le faire voir, nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Théorème I. — *Les polynômes* F_1, F_2, F_3, *si l'on tient compte de l'équation* (1), *sont respectivement divisibles par* x^2, y^2, z^2, *et il en est de même de* λ, μ, ν.

Je dis d'abord que l'on a les six relations

$$(10)\quad \begin{cases} y^3 F_1 - x^3 F_2 = x^2 \psi\mu, \\ z^3 F_2 - y^3 F_3 = y^2 \varphi\nu, \\ x^3 F_3 - z^3 F_1 = z^2 \chi\lambda, \\ y^3 F_1 - x^3 F_2 = y^2 \psi\lambda, \\ z^3 F_2 - y^3 F_3 = z^2 \varphi\mu, \\ x^3 F_3 - z^3 F_1 = x^2 \chi\nu. \end{cases}$$

Démontrons, par exemple, la première. On a

$$y^3 F_1 = F(x\psi - x\psi, y\varphi, -y\chi) = F(x\psi - x\psi, y\varphi, z\psi + x\varphi),$$

et, si l'on développe le second membre d'après le théorème de Taylor, en considérant $-x\psi$ et $x\varphi$ comme les accroissements, il vient

$$y^3 F_1 = \psi^3 F - x\psi^3 \varphi + x\psi^3 \varphi + x^2 \psi\mu + x^3 F_2.$$

Comme la somme des trois premiers termes du second membre est nulle, la première relation est démontrée. Les autres se démontreraient de même. Cela posé, on voit que les trois premières relations (10) expriment que F_1, F_2, F_3 sont respectivement divisibles par x^2, y^2, z^2. D'autre part, si l'on égale les seconds membres de celles des équations (10) dont les premiers sont identiques,

on a

$$x^2\mu = y^2\lambda, \qquad y^2\nu = z^2\mu, \qquad z^2\lambda = x^2\nu.$$

Or ces équations expriment que λ, μ, ν sont respectivement divisibles par x^2, y^2, z^2 et que les trois quotients sont égaux. Alors, en désignant par π le quotient commun, on a

$$(11) \qquad \lambda = x^2\pi, \qquad \mu = y^2\pi, \qquad \nu = z^2\pi.$$

Remarque. — En tenant compte des relations (11), on voit que les équations (10) se réduisent à deux, aux deux suivantes, par exemple,

$$(12) \qquad y^3 F_1 - x^3 F_2 = x^2 y^2 \pi\psi, \qquad x^3 F_3 - z^3 F_1 = x^2 z^2 \pi\chi.$$

En effet, si l'on remplace dans les équations (10) λ, μ, ν par les valeurs $x^2\pi$, $y^2\pi$, $z^2\pi$, on voit d'abord que ces équations se réduisent aux trois premières dont deux sont les équations (12) et la troisième

$$(13) \qquad z^3 F_2 - y^3 F_3 = y^2 z^2 \pi\varphi.$$

Mais cette dernière est la conséquence des deux autres; car, si l'on élimine F_1 entre les équations (12), il vient

$$-z^3 x^3 F_2 + x^3 y^3 F_3 = x^2 y^2 z^2 (y\chi + z\psi) = -x^3 y^2 z^2 \varphi,$$

et, en divisant par x^3 les deux membres, on retombe sur l'équation (13). Il est aisé maintenant d'arriver aux formules demandées. Remarquons d'abord que les formules (5), après qu'on y a remplacé λ par $x^2\pi$, peuvent s'écrire

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= x^3 \frac{F_1}{x^2}, \\ Y &= x^2 \left(y \frac{F_1}{x^2} - \pi\psi \right), \\ Z &= x^2 \left(z \frac{F_1}{x^2} + \pi\chi \right). \end{aligned} \right.$$

et les formules (12)

$$(15)\qquad y\,\frac{F_1}{x^2} - \pi\psi = x\,\frac{F_2}{y^2},\qquad z\,\frac{F_1}{x^2} + \pi\chi = x\,\frac{F_3}{z^2}.$$

Si l'on remplace enfin dans les deux dernières équations (14) les quantités entre parenthèses par les valeurs que donnent les équations (15), après avoir supprimé un facteur commun x^3, on a

$$(16)\qquad X = \frac{F_1}{x^2},\qquad Y = \frac{F_2}{y^2},\qquad Z = \frac{F_3}{z^2};$$

ce sont les formules demandées qui sont du quatrième degré, comme nous l'avons annoncé, puisque F_1, F_2, F_3 sont des polynômes du sixième degré en x, y, z.

Cauchy est arrivé aux formules

$$\frac{x^2 X}{F_1} = \frac{y^2 Y}{F_2} = \frac{z^2 Z}{F_3},$$

mais, comme il ne les a pas mises sous la forme (16), il paraît probable qu'il ne connaissait pas le théorème I.

4. *Application des formules* (16). — Soit d'abord l'équation

$$(17)\qquad aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} F_1 &= b(3cz^2 + dxy)^3 - c(3by^2 + dxz)^3 \\ &= 27bc(cz^3 - by^3)(by^3 + cz^3 + dxyz) - d^2x^3 \\ &= (by^3 - cz^3)(27abc + d^3)x^3; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{F_1}{x^2} = (27abc + d^3)\,x\,(by^3 - cz^3).$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{F_2}{y_2} = (27abc + d^3)y(cz^3 - ax^3),$$

$$\frac{F_3}{z^2} = (27abc + d^3)z(ax^3 - by^3).$$

Appliquant alors les formules (16) et supprimant le facteur $27abc + d^3$, on a

$$(18) \qquad \begin{cases} X = x(by^3 - cz^3), \\ Y = y(cz^3 - ax^3), \\ Z = z(ax^3 - by^3). \end{cases}$$

Soit encore l'équation

$$(19) \qquad aX^3 + cZ^3 + kXY^2 = 0.$$

On obtient les formules

$$(20) \qquad \begin{cases} X = 8k^2xy^3, \\ Y = 27a^2x^4 + 18akx^2y^2 - k^2y^4, \\ Z = 2kyz(9ax^2 + ky^2). \end{cases}$$

5. *Nouvelle méthode pour arriver directement aux formules* (16). — Cette méthode repose sur le théorème suivant :

Théorème II. — (x, y, z) *est une solution double du système des deux équations* (1) *et* (9) *dans lesquelles* X, Y, Z *sont considérés comme les inconnues.*

On entend par là que, si l'on élimine une quelconque des trois variables X, Y, Z entre les deux équations (1) et (9), l'équation résultant de l'élimination, qui contient une seule inconnue, l'un des rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, $\frac{Y}{Z}$, admet la solution double correspondante $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{z}$. Supposons, par exemple, qu'on élimine Z entre les équations (1) et (9), je dis que l'équation en $\frac{Y}{X}$ admet $\frac{y}{x}$ comme racine double. En effet, si l'on désigne par m le rapport $\frac{Y}{X}$ et qu'on élimine $\frac{Z}{X}$ entre les équations (1) et (9), on a

$$F(\psi, m\psi, -m\chi - \varphi) = 0,$$

et, si l'on développe le premier membre d'après le théorème de Taylor, en considérant $-\varphi$ comme l'accroissement, il vient

$$\begin{aligned} &F(\psi, m\psi, -m\chi) - \psi(\psi, m\psi, -m\chi)\varphi \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d\psi}{dz}(\psi, m\psi, -m\chi)\varphi^2 - \frac{1}{6}\frac{d^2\psi}{dz^2}\varphi^3 = 0\ (^1). \end{aligned}$$

Ordonnant ensuite par rapport aux puissances décroissantes de m, on a

$$(21) \quad F_1 m^3 + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)m^2 + (\psi\chi_2 - \chi\psi_2)m - F_2 = 0.$$

Or la première dérivée du premier membre de cette équation est $3F_1 m^2 + 2(\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)m + \psi\chi_2 - \chi\psi_2$, et, si l'on y remplace $\psi\chi_2 - \chi\psi_2$ par sa valeur tirée de l'équation (21), on a

$$\frac{2F_1 m^3 + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)m^2 + F_2}{m},$$

ou encore, en substituant $\frac{y}{x}$ à m et à x^3F_2 sa valeur tirée de la première des équations (12),

$$\frac{y}{x^2}[3yF_1 - x^2\pi\psi + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)x].$$

---

(1) $\psi(\psi, m\psi, -m\chi)$, $\frac{d\psi}{dz}(\psi, m\psi, -m\chi)$ représentent respectivement les résultats de la substitution, dans ψ et $\frac{d\psi}{dz}$, de ψ, $m\psi$, $-m\chi$ respectivement, à x, y, z.

Il faut donc prouver que l'on a

$$(22)\qquad 3y\,F_1 - x^2\psi\pi + x(\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1) = 0.$$

Or, c'est ce que l'on voit immédiatement en remplaçant $3F_1$ par la quantité $\psi\chi_1 - \chi\psi_1$ qui lui est identique, puisque F_1 est une fonction homogène de φ, ψ, $-\chi$.

En effet, l'équation (22) peut alors s'écrire

$$\psi(x\varphi_1 + \psi\chi_1 - x^2\pi) - \psi(x\varphi + y\chi) = 0,$$

et, comme la première des équations (8), dans laquelle on remplace λ par $x^2\pi$, montre que $x\varphi_1 + y\chi_1 - x^2\pi$ est une quantité égale à $-z\psi_1$ et que d'ailleurs $x\varphi + y\chi$ peut être remplacée par $-z\psi$, on a bien une identité. Le théorème II étant démontré et (x, y, z) désignant comme précédemment la solution donnée, et (X, Y, Z) la solution que l'on veut obtenir, nous identifierons le premier membre de l'équation (21) divisé par F_1 et celui de l'équation

$$\left(m - \frac{y}{x}\right)^2 \left(m - \frac{Y}{x}\right) = 0,$$

ou

$$(23)\quad m^3 - \left(\frac{Y}{X} + \frac{2y}{x}\right) m^2 + \left(\frac{2y}{x}\,\frac{Y}{X} + \frac{y^2}{x^2}\right) m - \frac{y^2}{x^2}\,\frac{Y}{X} = 0.$$

Or, si l'on identifie les deux derniers termes des équations (21) et (23), on a $\dfrac{x^2 X}{F_1} = \dfrac{y^2 Y}{F_2}$, et si, au lieu d'éliminer Z entre les équations (1) et (9), on avait éliminé Y, on aurait trouvé de même $\dfrac{x^2 X}{F_1} = \dfrac{z^2 Z}{F_3}$ On a donc

$$\frac{x^2 X}{F_1} = \frac{y^2 Y}{F_2} = \frac{z^2 Z}{F_3},$$

d'où l'on déduit les formules (16).

Remarque. — On pourra obtenir les valeurs de $\dfrac{Y}{X}$ et $\dfrac{Z}{X}$ en résolvant deux équations du premier degré à une inconnue. En effet, après avoir supprimé la racine double $\frac{y}{x}$ dans l'équation (23), on aura une équation de premier degré qui donnera $\frac{Y}{X}$. On aura ensuite $\frac{Z}{X}$ en résolvant l'équation (9) après y avoir remplacé $\frac{Y}{X}$ par la valeur obtenue. Soit, par exemple, l'équation

$$X^3 + Y^3 - 7Z^3 = 0.$$

Prenons comme solution donnée la solution $(2, -1, 1)$, l'équation (21) est alors $5m^3 + 16m^2 + 4m - 16 = 0$, et, en divisant le premier membre de cette équation par $m^2 + 4m + 4$, qui est le carré de $(m + 2)$, on a à résoudre l'équation $5m - 4 = 0$, d'où $\frac{X}{Y} = \frac{4}{5}$. On a ensuite

$$\frac{Z}{Y} = \frac{3}{5},$$

et l'on obtient finalement la solution $(4, 5, 3)$.

6. *Indication de la marche à suivre pour calculer* π, $\frac{F_1}{x^2}$, $\frac{F_2}{y^2}$, $\frac{F_3}{z^2}$. — Considérons d'abord π. On a

$$2\pi = \frac{2\lambda}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[\psi\left(\frac{d\chi}{dy}\psi - \frac{d\chi}{dz}\chi\right) + \chi\left(\chi\frac{d\psi}{dz} - \psi\frac{d\chi}{dz}\right)\right].$$

On détermine d'abord les deux différences $\frac{d\chi}{dy}\psi - \frac{d\chi}{dz}\chi$, $\chi\frac{d\psi}{dz} - \psi\frac{d\chi}{dz}$ et on les multiplie respectivement par ψ et χ. Le développement contient des termes en x^3, x^2, x et des termes indépendants de x. Pour vérifier que 2λ est divisible par x^2 et calculer π en même temps, on prouve d'abord, en tenant compte de l'équation (1), que le polynôme indépendant de x peut être remplacé par un polynôme divisible par x, et l'on ajoute au quotient de ce polynôme par x celui qui est obtenu en divisant par x les termes qui contiennent x à la première puissance. Il ne reste plus alors qu'à montrer que le polynôme ainsi formé est divisible par x. Le calcul s'achève ensuite aisément. J'indiquerai ici seulement la première partie du calcul.

En désignant par A la somme des termes indépendants de x, on a

$$A = \left\{ \begin{array}{r|r|r|r|l} 18fc^2 & z^5 + 54bc^2 & yz^4 + 72bce & y^2z^3 + 72bcf & y^3z^2 \\ -6ce^2 & -12cef & -12e^2f & -12ef^2 & \\ & -6e^3 & +12cf^2 & +12e^2b & \\ & & -12bef & y^4z + 18b^2e & y^5. \\ & & -6f^3 & -6bf^2 & \\ & & +54b^2c & & \end{array} \right.$$

En mettant d'abord $54bcyz$ en facteur dans quatre termes, on a

$$54bcyz(cz^3 + eyz^2 + fzy^2 + by^3),$$

ou, en remplaçant le second facteur par sa valeur tirée de l'équation (1),

$$-54bcxyz(ax^2 + ky^2 + lxy + gz^2 + hxz + dyz).$$

On continue de grouper les termes quatre à quatre et l'on opère comme pour le premier groupe. On trouve ainsi que le polynôme A peut être remplacé par un polynôme divisible par x. Alors, si l'on supprime le facteur x, on voit que le résultat demandé est le produit des deux polynômes

$$ax^2 + ky^2 + lxy + gz^2 + hxz + dyz,$$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 6f^2 & y^2 + 6ef & yz + 6e^2 & z^2. \\ -18bc & -54bc & -18cf^2 & \end{array}$$

Calcul de $\frac{F_1}{x^2}, \frac{F_2}{y^2}, \frac{F_3}{z^2}$. — On procédera comme pour le calcul de π, c'est-à-dire que l'on commencera par faire des groupements de quatre termes ayant un facteur commun.

7. Cherchons maintenant à quelle condition le système des équations (1) et (9) a une racine triple; c'est ce qu'indique le théorème suivant :

Théorème III. — *Pour que les équations résultant de l'élimination d'une des variables* X, Y, Z *entre les équations* (1) *et* (9) *aient chacune une racine triple, il faut et il suffit que la condition* $\pi = 0$ *soit remplie.* (On suppose qu'aucune des trois variables x, y, z n'est nulle.)

Si l'on considère, par exemple, l'équation (21) résultant de l'élimination de Z entre (1) et (9), cette équation, qui a déjà la racine double $\frac{y}{x}$, admettra la même racine comme triple, si la seconde dérivée de son premier membre est nulle, c'est-à-dire si l'on a

$$3F_1 m + \psi\varphi_1 - \varphi\psi_1 = 0,$$

ou, en remplaçant m par $\frac{y}{x}$,

$$3F_1 y + (\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1)x = 0.$$

Or l'équation (22, n° 5) montre qu'alors on doit avoir $x^2\pi\psi = 0$; on obtiendrait de même $y^2\pi\varphi = 0$, $z^2\pi\chi = 0$. Il est d'abord évident que la condition $\pi = 0$ est suffisante; elle est de plus nécessaire. En effet, si elle n'était pas remplie, comme x, y, z ne sont pas nuls, on aurait $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, et, par suite, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ ou $x^2\pi = 0$, $y^2\pi = 0$, $z^2\pi = 0$, et, comme x, y, z ne sont pas nuls, on retombe nécessairement sur la condition unique $\pi = 0$.

8. Nous allons maintenant chercher à quelle condi-

tion les formules (5) et les formules équivalentes sont inapplicables, et, à cet effet, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème IV. — *Pour que les formules* (5) *et les formules équivalentes* (6), (7) *et* (16) *soient inapplicables, c'est-à-dire pour que la solution* (X, Y, Z) *obtenue par ces formules soit identique à la solution* (x, y, z), *il faut et il suffit que l'on ait* $\pi = 0$. (On suppose ici, comme pour le théorème IV, qu'aucune des variables x, y, z n'est nulle.)

Considérons, par exemple, les formules (5). Si l'on y remplace F_1 par $x^2 Q_1$ et λ par πx^2, elles deviennent, après la suppression du facteur commun x,

$$X = x Q_1, \qquad Y = y Q_1 - \psi\pi, \qquad Z = z Q_1 + \chi\pi.$$

Il est d'abord évident que la condition $\pi = 0$ est suffisante, puisque, si elle est remplie, les formules précédentes donnent

$$X = x Q_1, \qquad Y = y Q_1, \qquad Z = z Q_1.$$

Je dis maintenant qu'elle est nécessaire. En effet, si l'on n'avait pas $\pi = 0$, on devrait avoir $\psi = 0$, $\chi = 0$, ce qui entraîne $\lambda = 0$ ou $x^2\pi = 0$. Mais, comme x n'est pas nul, on a nécessairement $\pi = 0$.

On serait encore arrivé à la même conclusion en exprimant que chacune des équations résultant de l'élimination de l'une des variables X, Y, Z entre les équations (1) et (9) a une racine triple (th. IV, n° 8). En effet, l'équation (21) et les autres équations analogues ne peuvent donner que la solution connue (x, y, z).

9. *Interprétation de la condition* $\pi = 0$. — Nous considérerons deux cas particuliers. Soit l'équation

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ + kXYZ = 0; \tag{24}$$

on a

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \pi &= (27abc + d^3)xyz \\ &\quad + k(9acx^2z + d^2xy^2 - 3cdyz^2 - 3cky^2z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Faisons d'abord $b = 0$, $d = 0$, dans les équations (24) et (25), on aura

$$(26)\qquad aX^3 + cZ^3 + kXY^2 = 0,$$

$$(27)\qquad 3ax^2 - ky^2 = 0.$$

(On a supprimé dans π le facteur z, puisque, comme il a été convenu, on suppose qu'aucune des variables x, y, z n'est nulle.)

De l'équation (27) on tire

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{\sqrt{3ak}}{3a}.$$

On voit que, si on laisse les coefficients indéterminés dans l'équation (26), la solution triple n'existe pas, puisque le rapport $\frac{x}{y}$ est irrationnel en général; mais nous allons établir les conditions pour que, dans la solution triple, x, y, z soient entiers. v étant un nombre entier, posons

$$(28)\qquad 3ak = v^2;$$

on a alors

$$(29)\qquad \frac{x}{y} = \pm \frac{v}{a}.$$

Si, maintenant, on remplace, dans l'équation (26), x et k par leurs valeurs tirées des équations (28) et (29), on obtient

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{2v}{\sqrt[3]{2ca^2}},$$

et, en posant, u étant un nombre entier,

$$(30)\qquad ca^2 = 4u^3,$$

on a

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v}{u}.$$

Ainsi la solution triple est

$$(uv,\ \pm au,\ av).$$

Voyons maintenant ce que devient l'équation (26). Si l'on y remplace k et c par leurs valeurs tirées des équations (28) et (30), on a

$$a^3X^3 + 3av^2XY^2 + 4u^3z^3 = 0,$$

ou, en multipliant par 2 les deux membres,

$$(aX + vY)^3 + (aX - vY)^3 + (2uZ)^3 = 0.$$

On voit sans peine, sous cette forme, que l'équation (26) n'admet pas d'autre solution que la solution triple que nous avons trouvée.

Considérons maintenant le cas où k est nul dans l'équation (24). Alors les équations (24) et (25) deviennent

$$(31)\quad aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ = 0, \qquad (27abc + d^3) = 0.$$

Dans la dernière, on a supprimé le facteur commun xyz. La seconde des équations (31) ne contenant aucune des inconnues x, y, z, il n'y a pas lieu de chercher la racine triple; interprétons néanmoins la condition qu'elle exprime. Supposons d'abord que a, b, c soient égaux à 1 : alors l'équation de condition donne $d = -3$ et la première des équations (31) devient

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XZ = 0$$

ou

$$(X + Y + Z)(X^2 + Y^2 + Z^2 - YZ - XZ - XY) = 0.$$

Ainsi, dans le cas actuel, la condition $\pi = 0$ exprime que le premier membre de l'équation donnée est décomposable en deux facteurs, entiers et rationnels.

Le cas où a, b, c ne sont pas toujours égaux à 1 se ramène au précédent, en posant

$$U = \sqrt[3]{a}X, \qquad V = \sqrt[3]{b}Y, \qquad T = \sqrt[3]{c}Z.$$

Le premier membre de l'équation donnée est encore décomposable en deux facteurs entiers et rationnels par rapport à X, Y, Z, seulement les coefficients sont, en général, incommensurables.

10. Nous avons établi (nos 2 et 3) des formules dues à Cauchy, qui font connaître une deuxième solution (X, Y, Z) quand on en connaît une première (x, y, z). Nous les appellerons désormais *formules de première espèce* pour les distinguer d'autres formules également dues à Cauchy et que nous appellerons *formules de seconde espèce*. La recherche des nouvelles formules est l'objet du problème suivant :

Problème II. — *Trouver des formules qui donnent une troisième solution* (X, Y, Z), *lorsque deux autres* (x, y, z), (x', y', z') *sont connues.*

On part des équations (2) et (3), comme dans le problème I; mais, au lieu de laisser d'abord u, v, t indéterminés, on fait $u = x'$, $v = y'$, $t = z'$. De plus, on remplace, dans l'équation (3), $\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}t\right)^{(2)}$ par l'expression qui lui est identique, comme il a déjà été dit, c'est-à-dire par $x\frac{dF}{du} + y\frac{dF}{dv} + z\frac{dF}{dz}$. Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$X = x\rho + x', \qquad Y = y\rho - y', \qquad Z = z\rho + z',$$

$$\left(x'\frac{dF}{dx} - y'\frac{dF}{dy} - z'\frac{dF}{dz}\right)\rho + x\frac{dF}{dx'} + y\frac{dF}{dy'} + z\frac{dF}{dz'} = 0.$$

Tirant maintenant de la dernière la valeur de ρ et la substituant dans les trois autres, on a les formules de seconde espèce

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} X &= x\left(x\frac{dF}{dx'}+y\frac{dF}{dy'}+z\frac{dF}{dz'}\right)\\ &\quad -x'\left(x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}\right),\\ Y &= y\left(x\frac{dF}{dx'}+y\frac{dF}{dy'}+z\frac{dF}{dz'}\right)\\ &\quad -y'\left(x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}\right),\\ Z &= z\left(x\frac{dF}{dx'}+y\frac{dF}{dy'}+z\frac{dF}{dz'}\right)\\ &\quad -z'\left(x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}\right). \end{aligned}\right.$$

Remarque. — Les formules (32) cesseraient d'être applicables, si (x', y', z') était la solution déduite de la solution (x, y, z) à l'aide des formules (5) ou des formules équivalentes. En effet, (x', y', z') est la solution que nous avons désignée par (X, Y, Z) dans ces formules, et, comme l'équation (9, n° 2) est satisfaite, on a

$$x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=0.$$

Alors les formules (32) donnent pour X, Y, Z les valeurs de x, y, z multipliées par un même facteur, c'est-à-dire que l'on retombe sur la première solution.

11. *Applications des formules* (32).

1° On peut supposer dans les formules (32) que l'on donne aux variables x', y', z' correspondant à l'une des solutions (x', y', z') des valeurs numériques déterminées; on a alors des formules qui, comme les formules (16), donnent X, Y, Z en fonction des variables x, y, z correspondant à une seule solution donnée (x, y, z). Les fonctions sont du second degré en x, y, z au lieu du quatrième; mais aussi il faut observer que les formules deviendraient illusoires si l'on y faisait

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z',$$

ou bien encore si (x', y', z') était la solution déduite de (x, y, z) à l'aide des formules (16) ou des formules équivalentes.

2° Si l'équation qu'on obtient en égalant l'une des variables à zéro dans l'équation (1) admet des valeurs entières pour les deux autres variables, si, par exemple, on a

$$x' = m, \qquad y' = n, \qquad z' = 0,$$

on pourra remplacer, dans les formules (32), x', y', z' respectivement par m, n, 0 et l'on aura encore X, Y, Z par des formules du second degré en x, y, z. Dans le cas où, en faisant successivement chacune des variables x', y', z' égale à zéro, les équations du troisième degré correspondantes auraient leurs trois racines commensurables, on aurait neuf formules, de sorte qu'à une solution (x, y, z) correspondraient neuf solutions : c'est ce qui arrive, par exemple, pour l'équation

$$\begin{aligned} X^3 + 2Y^3 + 20XYZ - 18\,YZ^2 - ZX^2 \\ - XY^2 - ZY^2 - 9XZ^2 - 2YX^2 = -9Z^3. \end{aligned}$$

Cette équation admet la solution $(1, 1, 1)$ et à cette solution correspondent les neuf solutions

$$(1, 1, 2), \quad (3, 1, 2), \quad (0, 1, 2), \quad (6, 3, 5), \quad (6, 3, 7),$$
$$(2, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (3, 0, 1), \quad (3, 0, 1),$$

dont deux, comme on voit, sont identiques.

12. *Simplification des formules* (32) *dans le cas de l'équation*

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ = 0.$$

On remarque d'abord que, dans le cas actuel, les formules (32) peuvent s'écrire

$$(33)\quad \begin{cases} X = 3byy'(xy' - yx') \\ \qquad + 3czz'(xz' - zx') + d(x^2y'z' - x'^2yz), \\ Y = 3axx'(yx' - xy') \\ \qquad + 3czz'(yz' - zy') + d(y^2x'z' - y'^2xz), \\ Z = 3axx'(zx' - xz') \\ \qquad + 3byy'(zy' - yz') + d(z^2x'y'^2 - z'^2xy). \end{cases}$$

D'ailleurs, des deux équations

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dxyz = 0,$$
$$ax'^3 + by'^3 + cz'^3 + dx'y'z' = 0,$$

on tire

$$(34)\quad \begin{cases} a = \dfrac{c(y^3z'^3 - z^3y'^3) + dyy'(y^2x'z' - y'^2xz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3}, \\ b = \dfrac{c(z^3x'^3 - x^3z'^3) - dxx'(x^2y'z' - x'^2yz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3}, \end{cases}$$

et si l'on substitue, dans la première des équations (33), pour a et b les valeurs (34), on a

$$(35)\qquad X = \frac{[3c(zx' - xz')(yz' - zy') + d(xy' - yx')^2](x^2y'z' - x'^2yz)}{x^2y'^2 - xyx'y' + y^2x'^2}.$$

Or la valeur de Y, dans les équations (33), se déduit de celle de X en y changeant b en a et permutant x, y, ainsi que x', y', et, comme le changement de b en a se fait dans les formules (34) par les mêmes permutations, on déduira la valeur de Y de celle de X donnée par l'équation (35), en faisant dans cette dernière les permutations indiquées. Par là, comme on le voit aisément, le facteur $x^2y'z' - x'^2yz$ change seul et devient $y^2x'z' - y'^2xz$: on a donc

$$\frac{X}{Y} = \frac{x^2y'z' - x'^2yz}{y^2x'z - y'^2xz}.$$

On trouverait de même

$$\frac{Z}{Y} = \frac{z^2x'y' - z'^2xy}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

On obtient donc finalement les formules demandées

$$(36)\qquad \begin{cases} X = x^2y'z' - x'^2yz, \\ Y = y^2x'z' - y'^2xz, \\ Z = z^2x'y' - z'^2xy. \end{cases}$$

J'avais déjà obtenu ces formules par la méthode des identités dans le cas où d est nul ([1]); mais M. Sylvester les a données sans démonstration dans le cas plus général.

13. *Cas où l'équation* (1) *est symétrique par rapport à deux des variables*, X, Y *par exemple*.

On a alors

$$b = a, \qquad g = e, \qquad h = f, \qquad l = k$$

et les solutions (x, y, z), (x', y', z') peuvent alors s'écrire aussi (x, y, z), (x', y', z'). Mais les formules (32) n'étant pas symétriques par rapport à x, y ou x', y', on comprend que l'on trouve plus d'une nouvelle solution. Or, si l'on combine, deux à deux, les quatre solutions précédentes, on a six groupes des solutions données; mais, si l'on exclut la solution $(1, -1, 0)$ et que l'on considère (α, β, γ), (β, α, γ) comme une seule solution, on n'obtiendra, en général, comme il est aisé de le voir, que deux solutions distinctes. Dans le cas où (x, y, z), (x', y', z') seraient deux solutions déduites l'une de l'autre à l'aide des formules (16) ou des formules équivalentes, on ne trouverait plus qu'une solution nouvelle.

Faisons d'abord application de ce qui précède à l'équation $X^3 + Y^3 = 7Z^3$. Si l'on permute d'abord x, y

---

([1]) *Voir* le Mémoire inséré dans les *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVIII, p. 23; 1879. Nous indiquerons désormais les nombreux renvois à ce Mémoire par les mots en usage *loco citato*.

dans les formules (36), on aura les suivantes

$$(37)\qquad \begin{cases} X = y^2 y' z' - x'^2 xz, \\ Y = x^2 x' z' - y'^2 yz, \\ Z = z^2 x' y' - z'^2 xy. \end{cases}$$

Remplaçons maintenant, dans les formules précédentes, x, y, z par $2, -1, 1$ et x', y', z' par $4, 5, 3$, la deuxième solution étant déduite de la première à l'aide des formules (18), on trouve la solution $(-17, 73, 38)$.

Si l'on avait pris pour point de départ la solution $(2, -1, 1)$ et la solution $(-1256, 1265, 183)$, qui est la troisième solution déduite des formules (18), on aurait trouvé les deux solutions distinctes $(-1256, 1265, 183)$, $(-65882, 90271, 40049)$, mais dont la première est déjà connue.

M. Lucas a, le premier, déduit la solution $(-7, 73, 38)$ de nouvelles formules qu'il a fait connaître; mais ces formules sont inutiles au point de vue de la résolution des équations cubiques; car, comme il est aisé de le voir, elles sont la conséquence immédiate des formules de Cauchy de première et de seconde espèce. Il suffit en effet, pour retrouver les formules de M. Lucas, de remplacer, dans les formules (37), x', y', z' par les expressions que donnent les formules (18, n° 4).

14. Dans ce qui précède, je n'ai fait que simplifier ou compléter des résultats déjà obtenus par Cauchy; mais ici commence la partie entièrement neuve. Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Lorsqu'une équation cubique, homogène, à trois variables, peut être résolue en nombres entiers, et qu'on en connaît une solution* (x, y, z), *on* *peut toujours ramener sa résolution à celle d'une équation biquadratique.*

Commençant un calcul semblable à celui du n° 2, on pose

$$(38)\qquad X = \rho x + u, \qquad Y = \rho y + v, \qquad Z = \rho z.$$

Alors, si l'on substitue dans l'équation (1) les valeurs précédentes de X, Y, Z, on a

$$\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)\rho^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} + F(u, v, o) = o,$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à ρ, il vient

$$(39)\quad \left\{\rho = \frac{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \\ \pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)}\right]^2 - 4\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)F(u, v, o)}\end{array}\right\}}{2\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)}\right. ;$$

égalant maintenant la quantité sous le radical au carré d'une nouvelle variable w, on obtient entre les trois variables u, v, w l'équation biquadratique

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)}\right]^2 \\ \quad -4\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)F(u, v, o) = w^2. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, la formule (39) devient

$$\rho = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u - \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \pm w}{2\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)},$$

et, en substituant la valeur précédente de ρ dans les formules (38), on a

$$
(41)\quad \begin{cases}
X = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \pm w\right]x \\
\qquad + 2u\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right), \\
Y = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \pm w\right]y \\
\qquad + 2v\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right), \\
Z = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)} \pm w\right]z.
\end{cases}
$$

Les formules (41) sont les formules demandées.

L'équation (40) peut d'ailleurs être toujours résolue en nombres entiers, car on y satisfait en prenant

$$
(42)\quad \begin{cases}
u = \frac{dF}{dy}, \\
v = -\frac{dF}{dx}, \\
w = -\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right)^{(2)}.
\end{cases}
$$

On aurait aussi immédiatement une autre solution si l'équation $F(u, v, 0)$ admettait une solution entière (u', v'); car on pourrait prendre

$$
(43)\quad u = u', \qquad v = v', \qquad w = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dx}u' + \frac{dF}{dy}v'\right)^{(2)}.
$$

Enfin, on peut encore obtenir directement et dans tous les cas une autre solution de l'équation (40), mais en se servant de deux solutions (x, y, z), (X, Y, Z) de l'équation (1). En effet, on déduit des formules (40)

$$
Xz - Zx = 2uz\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right),
$$

$$
Yz - Zy = 2vz\left(\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v\right);
$$

d'où

$$\frac{Xz - Zx}{Yz - Zy} = \frac{u}{v}.$$

Je dis que l'on peut prendre

$$(44) \qquad u = Xz - Zx, \qquad v = Yz - Zy.$$

En effet, m désignant une indéterminée, on peut écrire

$$u = m(Xz - Zx), \qquad v = m(Yz - Zy).$$

Alors, en substituant pour u et v ces valeurs dans le premier membre de l'équation (40), ce premier membre prendra la forme $m^4 q^2$ et, par l'extraction d'une racine carrée, on aura $w = m^2 q$. Or, en substituant dans les formules (41) pour u, v, w les valeurs précédentes, m^2 disparaît comme facteur commun ; on peut donc prendre les valeurs de u, v données par les formules (44) et l'on aura q pour valeur correspondante de w.

Remarque. — La solution donnée par les formules (42) ne conduit pas à de nouvelles solutions de l'équation (1) ; car, si l'on prend w avec le signe $-$, on voit que X, Y, Z sont respectivement égaux à x, y, z multipliés par un même nombre, c'est-à-dire que l'on retrouve la solution (x, y, z), et, si l'on prend w avec le signe $+$, on obtient la solution insignifiante (0, 0, 0). On arriverait aux mêmes conclusions, si l'on avait pris la solution donnée par les formules (43). Mais il n'en est plus de même quand on fait usage des formules (44).

Faisons application de ce qui précède à l'équation

$$(45) \qquad X^3 + Y^3 - 7Z^3 = 0.$$

L'équation (40) est alors

$$(46) \qquad -4u^4 - 12u^2v^2 - 4u^3v - 16uv^3 - v^4 = 3w^2.$$

En formant l'équation (46), on a changé w en $3w$; on devra donc faire le même changement dans les formules (41), (42) et (43). On part de la solution (2, —1, 1) de l'équation (45), et, à l'aide des formules (42) et (43) modifiées comme on vient de le dire, on calcule les deux solutions (1, — 4, 14), (1, —1, 1) de l'équation (46). De ces deux solutions elles-mêmes on déduit la solution (1, — 7, 29) de la même équation en se servant de formules qui seront données dans un prochain Mémoire sur les équations biquadratiques. Alors, si l'on remplace dans les formules (41), où l'on change w en $3w$, les quantités u, v, w par les valeurs 1, — 7, 29, on trouve les deux solutions de l'équation (45), (5, 4, 3), (73, — 17, 28).

On peut encore employer les formules (44). Si l'on prend les deux solutions (2, — 1, 1), (4, 5, 3) de l'équation (45), ces formules donnent $u = -1$, $v = 4$, et, par l'équation (46), on a $w = 7$. Alors les formules (41) donnent les deux solutions de l'équation (45),

$$(-1256,\ 1265,\ 183),\qquad (-65882,\ 90271,\ 40049).$$

Ces deux solutions ont déjà été déduites des formules (36) et (37). On pourra aisément s'en rendre compte.

15. Une question se présente maintenant : peut-on trouver l'équation cubique dont la résolution se ramène à celle d'une équation biquadratique donnée ? Mais, dans l'état actuel de la Science, il suffira de résoudre la question dans le cas où l'équation biquadratique est de la forme

$$(47)\qquad AX_1^4 + BY_1^4 = CZ_1^2,$$

avec la condition $C = A + B$; car cette forme comprend toutes les équations biquadratiques dont on a obtenu la solution complète. On est ainsi conduit à se proposer le problème suivant :

Problème III. — *Étant donnée l'équation* (47) *dans laquelle* C_1 *est égal à* $A+B$, *trouver l'équation cubique homogène dont la résolution s'y ramène.*

On remarque d'abord que, si l'on pose $CZ_1 = Z'$, l'équation (47) peut s'écrire

$$(48)\qquad ACX_1^4 + BCY_1^4 = Z'^2.$$

Prenons maintenant l'équation cubique suivante qui ne contient, outre les variables X, Y, Z, que les deux indéterminées e et f,

$$(49)\qquad e(X+Y)Z^2 + 2fY^2Z - (X-Y)(X^2+Y^2) = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à Z, on a

$$(50)\qquad Z = \frac{-fY^2 \pm \sqrt{eX^4 - (f^2-e)Y^4}}{e(X+Y)}.$$

Si maintenant on écrit que la quantité sous le radical dans la formule précédente est égale au carré d'une indéterminée Z', on est ramené à résoudre l'équation biquadratique

$$(51)\qquad eX_1^4 + (f^2-e)Y_1^4 = Z'^2,$$

qui est de même forme que l'équation (48), puisque dans toutes les deux la somme des coefficients de X_1^4 et de Y_1^4 est égale à un carré et que le coefficient du carré de la troisième inconnue est égal à 1. On prendra alors, dans l'équation (49), $e = AC$, $f = C$, et la résolution de l'équation cubique

$$(52)\qquad AC(X+Y)Z^2 + 2CY^2Z - (X-Y)(X^2+Y^2) = 0$$

sera ramenée à celle de l'équation biquadratique (48).

Cela posé, si, dans la formule (50), on remplace X, Y par X_1, Y_1, le radical par Z', et e, f par AC, C, on aura

$$Z = \frac{-CY_1^2 \pm Z'}{AC(X_1+Y_1)}.$$

On a d'ailleurs

$$X = X_1, \qquad Y = Y_1;$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} X &= ACX_1(X_1+Y_1),\\ Y &= ACY_1(X_1+Y_1),\\ Z &= -CY_1^2 \pm Z', \end{aligned}$$

ou encore, après avoir remplacé Z' par CZ_1,

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= AX_1(X_1+Y_1),\\ Y &= AY_1(X_1+Y_1),\\ Z &= -(Y_1^2 \pm Z_1). \end{aligned}\right.$$

Les formules (53) sont les formules demandées.

Faisons une application de ces formules à l'équation

$$(54)\qquad 3X_1^4 - 2Y_1^4 = Z_1^2,$$

qui est une de celles qui ont été résolues par le P. Pépin.

L'équation (52) est alors

$$(55)\qquad 3(X+Y)Z^2 + 2Y^2Z - (X-Y)(X^2+Y^2) = 0,$$

et les formules (53) deviennent

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= 3X_1(X_1+Y_1),\\ Y &= 3Y_1(X_1+Y_1),\\ Z &= -(Y_1^2 \pm Z_1). \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend d'abord $X_1 = Y_1 = Z_1 = 1$, les formules (58) donnent les solutions évidentes (1, 1, 0), (3, 3, 1); mais, si ensuite on prend $X_1 = 33$, $Y_1 = 13$, $Z_1 = 1871$, on a, par les mêmes formules, les deux solutions (99, 39, 37), (759, 299, — 340).

Remarques diverses. — I. La méthode employée pour la résolution de l'équation (52) peut s'étendre à toute équation cubique, homogène à trois variables, qui ne contient pas la troisième puissance d'une des inconnues. On passera ensuite de là à l'équation (1) par la méthode de Gauss modifiée comme je l'ai fait, page 9 du Mémoire de 1879 (*Nouvelles Annales*).

II. La résolution du problème III est *actuellement* plus importante que la solution du problème inverse qui ramènerait la résolution d'une équation biquadratique à celle d'une équation cubique, puisque jusqu'ici aucun géomètre n'a démontré qu'il avait obtenu la solution complète d'une équation cubique, tandis que l'on connaît la solution complète de plusieurs équations biquadratiques ([1]).

III. Il est curieux qu'on n'ait pas encore obtenu pour les équations cubiques d'autres formules que celles de Cauchy, de première et de seconde espèce. Toutes les tentatives pour trouver d'autres formules ont été vaines : on a vu ici même que des formules, que M. Lucas croyait nouvelles, sont la conséquence des formules de Cauchy.

16. Je me propose dans ce dernier paragraphe de montrer comment on peut quelquefois trouver des solutions d'une équation cubique, homogène à trois variables, au moyen de celles d'une équation cubique de même espèce, et en même temps j'obtiendrai des identités d'où l'on déduira des cas de possibilité de l'équa-

([1]) Le P. Pépin a le premier, dans divers Mémoires, donné la solution complète de plusieurs équations biquadratiques à coefficients numériques.

tion proposée. A ce dernier point de vue, le présent article peut être considéré comme une suite de celui de 1879 que nous avons déjà cité plusieurs fois.

Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème V. — *Lorsque l'équation* (1) *ne contient que le cube de l'une des inconnues et que l'équation obtenue, en égalant cette inconnue à zéro, a au moins une solution entière, si l'on connaît une solution* (x, y, z) *d'une autre équation cubique convenablement déterminée, on pourra trouver une solution* (X, Y, Z) *de l'équation proposée par des formules du troisième degré qui donneront* X, Y, Z *en fonction de* x, y, z.

On a vu (*loco citato*, p. 5) que l'on peut trouver une infinité de solutions de l'équation

$$X^2 + AXY + BY^2 = V^3 \tag{57}$$

à l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} X &= x^3 - 3Bxy^2 - ABy^3, \\ Y &= 3x^2y + 3Axy^2 + (A^2 - B)y^3, \\ V &= x^2 + Axy + By^2 \text{ (1)}. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

C'est ce résultat qui va nous servir de point de départ. Soit

$$aX^3 + bY^3 + kXY^2 + lYX^2 = cZ^3 \tag{59}$$

l'équation proposée, et supposons que l'équation

$$aX^3 + bY^3 + kXY^2 + lYX^2 = 0 \tag{60}$$

admette la solution entière (m, n). En divisant le premier membre de l'équation (59) par $nX - mY$, on la

(1) On ne les obtient pas toutes : ce sont d'autres formules qui donnent la solution complète.

met sous la forme

$$(61)\quad \left\{ \begin{aligned} &(nX - mY)[an^2X^2 + (am + ln)nXY \\ &\qquad + (am^2 + lmn + kn^2)Y^2] = cn^3Z^3, \end{aligned} \right.$$

ou, en multipliant les deux membres par a^2 et posant $naX = X'$,

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} &(X' - maY)[X'^2 + (am + ln)X'Y \\ &\qquad + a(am^2 + lmn + kn^2)Y^2] = ca^2n^3Z^3. \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant

$$(63)\qquad Z = zV, \qquad X' - maY = ca^2(nz)^3.$$

En remplaçant, dans l'équation (62), Z et $X' - maY$ par les expressions que donnent les formules (63), cette équation devient, en supprimant un facteur commun,

$$X'^2 + (am + ln)X'Y + a(am^2 + lmn + kn^2)Y^2 = V^3,$$

et l'on est ainsi amené à résoudre une équation de la forme (57). En employant les formules (58), on a

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} X' &= x^3 - 3a(am^2 + lmn + kn^2)xy^2 \\ &\qquad + a(am + ln)(am^2 + lmn + kn^2)y^3, \\ Y &= 3x^2y + 3(am + ln)xy^2 \\ &\qquad + [(l^2 - ak)n^2 + almn]y^3, \\ V &= x^2 + (am + ln)xy \\ &\qquad + a(am^2 + lmn + kn^2)y^2, \end{aligned} \right.$$

et, par suite, d'après la première des formules (63),

$$Z = z[x^2 + (am + ln)xy + a(am^2 + lmn + kn^2)y^2].$$

Si l'on désigne maintenant par P, Q, R les seconds membres des équations (64), qu'on remplace X' par naX et qu'on multiplie par na les deux membres des formules qui donnent Y et Z, on aura, en supprimant na dans les premiers membres,

$$(65)\qquad X = P, \qquad Y = naQ, \qquad Z = nazR.$$

Cela posé, si l'on remplace, dans la seconde des équations (63), X' et Y par les valeurs P et Q, on a l'équation du troisième degré

$$P - maQ = ca^2(nz)^3. \tag{66}$$

(X, Y, Z), (x, y, z) étant respectivement des solutions des équations (59) et (66), on voit que X, Y, Z sont des fonctions du troisième degré de x, y, z données par les formules (65) : le théorème est donc démontré.

Remplaçons maintenant, dans l'équation (59), X, Y, Z par les valeurs que donnent les équations (65) ; on aura

$$aP^3 + b(naQ)^3 + kP(naQ)^2 + lP^2 naQ = aa^2c(nz)^3 R^3,$$

et, si l'on met dans l'équation précédente, à la place de $a^2c(nz)^3$, la valeur $P - maQ$ que donne l'équation (66), on a l'identité

$$\left\{\begin{array}{l} aP^3 + b(naQ)^3 + kP(naQ)^2 + lP^2 naQ \\ \quad = a(P - maQ)R^3. \end{array}\right. \tag{67}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Lorsque, le premier membre de l'équation* (59) *étant égalé à zéro, on a ainsi une équation qui admet une solution entière* (m, n), *cette équation peut être résolue en nombres entiers toutes les fois que* c *est égal à la fonction du troisième degré représentée par* $a(P - maQ)$.

Appliquons les théorèmes V et VI à l'équation

$$X^3 + Y^3 = cZ^3. \tag{68}$$

On a

$$m = -1, \qquad n = 1, \qquad k = 0, \qquad l = 0;$$

alors les équations (65) et (66) deviennent

$$(69)\qquad \begin{cases} X = x^3 - 3xy^2 + y^3, \\ Y = 3x^2y - 3xy^2, \\ Z = z(x^2 - xy + y^2), \end{cases}$$

$$(70)\qquad x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3 = cz^3,$$

et les formules (69) permettent de passer d'une solution de l'équation (70) à une solution de l'équation (68). On a d'ailleurs l'identité

$$(71)\qquad \begin{cases} (x^3 - 3xy^2 + y^3)^3 + (3x^2y - 3xy^2)^3 \\ \quad = (x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3)(x^2 + xy + y^2)^3, \end{cases}$$

qui démontre que l'équation (68) peut être résolue en nombres entiers lorsqu'on a

$$c = x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3.$$

L'identité (71) n'est autre que l'identité (42) (*loco citato*, p. 18).

On peut donner une solution plus générale des deux questions précédentes. Pour éviter les longues écritures, j'expliquerai la méthode en prenant pour exemple l'équation (68); mais on verra bien qu'elle s'étend à l'équation plus générale (59).

Si l'on pose, suivant la notation déjà adoptée,

$$\begin{aligned} P &= x^3 - 3xy^2 + y^3, \\ Q &= 3xy(x - y), \\ R &= x^2 - xy + y^2, \end{aligned}$$

l'identité (71) peut s'écrire

$$(72)\qquad P^3 + Q^3 = (P + Q)R^3,$$

et l'on a d'ailleurs

$$(73)\qquad P + Q = cz^3.$$

Posons encore

$$(74) \qquad \gamma = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2,$$

α, β représentant des nombres entiers. Si l'on multiplie alors les deux membres de l'équation (72) par γ^9, on pourra l'écrire

$$(75) \qquad (\gamma^3 P)^3 + (\gamma^3 Q)^3 = \gamma^3(P + \gamma^3 Q)(\gamma R)^3.$$

Or, d'après l'identité (3) (*loco citato*, p. 4), on a

$$\gamma R = (\alpha x - \beta y)^2 \\ -(\alpha x - \beta y)[\beta x + (\alpha - \beta)y] + [\beta x + (\alpha - \beta)y^2],$$

et, si l'on pose

$$(76) \qquad \alpha x - \beta y = x', \qquad \beta x + (\alpha - \beta)y = y',$$

il vient

$$(77) \qquad \gamma R = x'^2 - x'y' + y'^2.$$

D'ailleurs, des deux équations (76), on tire

$$(78) \qquad x = \frac{(\alpha - \beta)x' - \beta y'}{\gamma}, \qquad y = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\gamma}.$$

Si maintenant on remplace, dans l'identité (75), x, y par les valeurs précédentes, qu'on désigne par P_1, Q_1 ce que deviennent alors $\gamma^3 P$, $\gamma^3 Q$ après la suppression des accents de x', y', puis enfin que l'on remarque que, après cette suppression, à cause de l'équation (77), γR peut être remplacé par R, l'identité (75) deviendra

$$(79) \qquad P_1^3 + Q_1^3 = (P_1 + Q_1)\gamma^3 R^3.$$

D'autre part, si l'on multiplie par γ^3 les deux membres de l'équation (73), on a

$$(80) \qquad P_1 + Q_1 = c\gamma^3 z^3,$$

et, en remplaçant, dans l'identité (79), $P_1 + Q_1$ par la valeur que donne l'équation (80), on obtient

$$(81)\qquad P_1^3 + Q_1^3 = c(\gamma^2 R z)^3.$$

En même temps on a les formules

$$(82)\qquad X = P_1, \qquad Y = Q_1, \qquad Z = \gamma^2 R z,$$

les valeurs de P_1, Q_1 étant

$$\begin{aligned} P_1 = {} & (\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3)x^3 + 9\alpha\beta(\alpha - \beta)x^2y \\ & - 3(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + \beta^3)xy^2 + (\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3)y^3, \\ Q_1 = {} & 3[-(\alpha - \beta)]\alpha\beta x^3 + (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + \beta^3)x^2y \\ & -(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3)xy^2 - (\alpha - \beta)\alpha\beta y^3. \end{aligned}$$

Appliquons les résultats précédents au cas où l'on a $\alpha = 1$, $\beta = 1$, et, par suite, $\gamma = 3$. L'équation (80) et les formules (82) deviendront

$$(83)\qquad x^3 - 3x^2y + y^3 = 3cz^3,$$

$$(84)\qquad \left\{ \begin{aligned} X &= x^3 - 6x^2y + 3xy^2 + y^3, \\ Y &= 2x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3, \\ Z &= 3z(x^2 - xy + y^2). \end{aligned} \right.$$

Ainsi, on passe d'une solution de l'équation (83) à une solution de l'équation (68) au moyen des formules (84). Ce résultat particulier avait déjà été obtenu par M. Lucas.