E. CAHEN

Note sur la théorie des séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 535-538

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__535_1>

NOTE SUR LA THÉORIE DES SÉRIES;

PAR M. E. CAHEN,

Professeur de Mathématiques spéciales à l'École de Cluny.

Dans une série à termes positifs $u_0, u_1, \ldots, u_n$, supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque n croît indéfiniment, tende vers 1 par valeurs inférieures à 1.

Duhamel a donné un procédé pour décider de la convergence ou de la divergence d'une telle série : on pose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$, et l'on cherche la limite de $n\alpha_n$.

Si cette limite est > 1, la série est convergente;

Si cette limite est < 1, la série est divergente;

Si cette limite est $= 1$, la règle de Duhamel ne s'applique pas.

Voici, dans ce cas, une règle qui complète celle de Duhamel.

On pose $n\alpha_n = 1 + \beta_n$; β_n *a pour limite* 0, *et l'on cherche la limite de* $n\beta_n$. *Si cette limite est différente de* $+\infty$, *la série est divergente.*

Soient, en effet, l cette limite et k un nombre $> l$. On aura, pour des valeurs suffisamment grandes de n,

$$n\beta_n < k, \qquad \text{d'où} \qquad \beta_n < \frac{k}{n}.$$

Par suite

$$1 + \beta_n \qquad \text{ou} \qquad n\alpha_n < 1 + \frac{k}{n}$$

et

$$\alpha_n < \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}.$$

De là on tire

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}},$$

a fortiori

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} + \cdots}$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n\left(1 - \frac{k}{n}\right)}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n-k}{n-k+1}.$$

Si l'on considère la série dont le terme général $v_n = \frac{1}{n-k}$, cette série est, comme on sait, divergente.

Donc, puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ est aussi divergente.

Premier exemple. — Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se mette sous la forme d'une fraction rationnelle en n, telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

expression qui tend vers 1 lorsque n croît indéfiniment. On a, par un calcul facile,

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots} - 1 \\ &= \frac{(A-a)n^{\lambda-1} + (B-b)n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}, \\ n\alpha_n &= \frac{(A-a)n^\lambda + (B-b)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots};\end{aligned}$$

$n\alpha_n$ tend vers $A - a$.

La règle de Duhamel montre que :

Si $A - a > 1$, la série est convergente ;

Si $A - a < 1$, la série est divergente ;

Si $A - a = 1$, on a

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{(B-b)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + \ldots}, \\ n\beta_n &= \frac{(B-b)n^\lambda + \ldots}{n^\lambda + \ldots}.\end{aligned}$$

La limite de $n\beta_n$ est $B - b$. Donc la série est divergente. Cette règle est de Gauss.

Second exemple. — Soit la série dont le terme général est

$$u_{n+1} = (2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\ldots(2-\sqrt[n]{e}),$$

ce terme général tend vers o. En effet, on a

$$\sqrt[n]{e} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$2 - \sqrt[n]{e} < 1 - \frac{1}{n};$$

le terme général est donc

$$< \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{n},$$

il tend vers o.

Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n]{e}$, il tend vers 1;

$$\alpha_n = \frac{1}{2-\sqrt[n]{e}} - 1 = \frac{\sqrt[n]{e}-1}{2-\sqrt[n]{e}},$$

$$n\alpha_n = \frac{n(\sqrt[n]{e}-1)}{2-\sqrt[n]{e}} = \frac{1 + \frac{1}{1.2}\frac{1}{n} + \ldots}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{1.2}\frac{1}{n^2} - \ldots},$$

$n\alpha_n$ tend vers 1;

$$\beta_n = \frac{1 + \frac{1}{1.2}\frac{1}{n} + \ldots}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{1.2}\frac{1}{n^2} - \ldots} - 1 = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{n} + \ldots}{1 - \frac{1}{n} - \ldots},$$

$$n\beta_n = \frac{\frac{3}{2} + \ldots}{1 - \ldots},$$

$n\beta_n$ tend vers $\frac{3}{2}$. Donc la série est divergente.