NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-B. POMEY

Sur une fonction qui a une ligne d'infinis

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 530-533

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__530_1>

SUR UNE FONCTION QUI A UNE LIGNE D'INFINIS;

PAR M. J.-B. POMEY.

On considère souvent en Analyse et l'on rencontre dans la théorie du potentiel des fonctions qui sont discontinues le long de lignes.

Je me propose de former ici, *a priori*, une fonction qui a une ligne d'infinis.

A cet effet, soit ω une variable imaginaire. J'envisage la série double dont le terme général est

$$\frac{1}{(x - \omega y)^{2+\alpha}},$$

x et y devant prendre toutes les valeurs entières positives et négatives, et α étant un nombre réel positif.

Je vais montrer d'abord que, si ω est imaginaire, la série est convergente.

Les points qui sont les affixes des quantités imaginaires $x + \omega y$ sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes dont les côtés sont 1 et ω.

Si r représente la distance de l'origine à l'un quelconque de ces sommets (l'origine étant naturellement exclue du nombre de ces sommets), la série des modules pourra être désignée par

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}}.$$

Je dis qu'elle est convergente.

Soient :

A un des parallélogrammes ;
S sa surface ;
$d\sigma$ un élément de son aire ;
u la distance de l'origine à $d\sigma$;
r la distance de l'origine au sommet de A, qui en est le plus éloigné.

On aura, en étendant l'intégration à tous les éléments $d\sigma$ de A,

$$\int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}} > \frac{1}{r^{2+\alpha}} \int d\sigma$$

ou

$$\frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}}.$$

Cela posé, nous pouvons négliger, dans la série

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}},$$

les termes qui se rapportent aux parallélogrammes A en nombre fini qui ne sont pas complètement extérieurs à un cercle de rayon R, dont le centre est à l'origine. Alors la divergence ou la convergence de la série ne pouvant être altérée par cette suppression, et le signe de sommation ne se rapportant qu'à des sommets extérieurs à ce cercle, j'aurai

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int_{\Sigma A} \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}};$$

l'intégrale est prise ici à l'intérieur de tous les parallélogrammes qui sont tout à fait extérieurs au cercle R, et l'on aura, *a fortiori*,

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}},$$

si l'on étend en plus l'intégrale aux portions extérieures au cercle R des parallélogrammes que ce cercle coupe, de manière que dès lors l'intégrale est étendue à toute la portion du plan extérieure au cercle R.

L'intégrale peut se calculer aisément en prenant pour élément d'aire l'aire comprise entre deux cercles décrits de l'origine comme centre avec u et $u + du$ pour rayon On a ainsi

$$\int \frac{d\sigma}{u^{2+\alpha}} = 2\pi \int \frac{du}{u^{1+\alpha}} = -\frac{2\pi}{\alpha}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)_{R}^{\infty} = \frac{2\pi}{\alpha R^{\alpha}}.$$

Donc on a

$$\sum \frac{1}{r^{2+\alpha}} < \frac{1}{S} \frac{2\pi}{\alpha R^{\alpha}}.$$

Si donc ω est imaginaire, la série en question est convergente.

Mais, si ω est réel, S est nul, et le raisonnement précédent tombe en défaut. De plus, $x + \omega y$ s'annule, si ω est commensurable, pour une infinité de valeurs de x et de y, la série diverge alors comme ayant une infinité de termes infinis, parce que leurs dénominateurs sont nuls. Et, si ω est incommensurable, un raisonnement direct connu, ou un résultat tiré de la théorie des fractions continues, nous apprend que $x + \omega y$ peut être rendu moindre que $\frac{1}{y}$ pour des valeurs convenables infiniment grandes de x et de y; la série diverge donc encore, comme ayant un nombre infini de termes infiniment grands. Notre série double a donc bien une ligne d'infinis qui est l'axe des quantités réelles.