NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Transformations algébriques par le calcul des différences

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 489-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__489_0>

TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES PAR LE CALCUL DES DIFFÉRENCES;

Par M. E. CESARO.

Nous nous proposons de représenter la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

au moyen des différences successives du premier terme de la série arbitraire

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots.$$

Ayant posé, à cet effet,

$$A_i = a_i u_i, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i x^i,$$

nous pourrons écrire, symboliquement,

$$(2) \quad F(x) = f(ux) = f(x + x\Delta) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{x^i f^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(u_0).$$

Supposons, par exemple, que la série (1) soit

$$0^r, \quad 1^r, \quad 2^r, \quad 3^r, \quad 4^r, \quad \ldots,$$

r étant entier. Le second membre de (2) s'arrête alors naturellement au $(r+1)^{\text{ième}}$ terme, et l'on peut écrire

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i f^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(0^r).$$

Du reste, si la série (1) est, d'une manière générale,

$$U(z), \quad U(z+h), \quad U(z+2h), \quad U(z+3h), \quad \ldots,$$

il est presque évident que l'on a, sous forme symbolique,

$$F(x) = U(z + Nh),$$

en supposant que N_r représente le second membre de (3).

Appliquons la formule (3) aux fonctions telles que

$$Q_r(x) = 1^r x + 2^r x^2 + 3^r x^3 + 4^r x^4 + \ldots.$$

Ici

$$a_i = 1, \qquad f(x) = \frac{1}{1-x},$$

et l'on obtient immédiatement la relation connue

$$Q_r(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i \Delta^i(0^r)}{(1-x)^{i+1}},$$

qui donne, pour les nombres de Bernoulli [1], l'expression suivante :

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i+1}} \Delta^i(0^{r-1}).$$

Soit, pour généraliser,

$$a_i = i^s, \qquad f(x) = Q_s(x).$$

La formule (3) devient

$$(4) \qquad Q_{r+s}(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{x^i Q_s^{(i)}(x)}{i!} \Delta^i(0^r).$$

Ainsi, pour $s = 1$, on trouve

$$Q_{r+1}(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{(i+x)x^i}{(1-x)^{i+2}} \Delta^i(0^r).$$

En particulier,

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-3} \frac{(-1)^i i}{2^{i+3}} \Delta^{i+1}(0^{r-2}).$$

---

[1] Voir notre article *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*.

De même, pour $s = 2$, on arrive à la formule

$$B_r = \frac{r}{2^r - 1} \sum_{i=1}^{i=r-3} \frac{(-1)^{i-1} i(i-3)}{2^{i+3}} \Delta^i(0^{r-3}); \qquad \text{etc.}$$

On établit autrement la formule (4) en partant de l'égalité

$$Q^{r+s} = Q^r Q^s = Q^s[1 + \Delta(0^r)]^Q;$$

d'où l'on déduit (4), en développant, suivant les puissances de Δ, et en observant que l'on a, sous forme symbolique,

$$x^i Q_s^{(i)}(x) = Q^{s+1}(Q-1)(Q-2)\ldots(Q-i+1).$$

Reprenons l'égalité (3) et remplaçons-y la limite supérieure de i par un nombre quelconque $n \geqq r$. Posons

$$(5) \qquad \varphi(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{t^i f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Pour effectuer le retour aux nombres u, remarquons que l'égalité (3) devient

$$(6) \quad F(x) = \varphi(x\Delta) = \varphi(ux - x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i^r x^i}{i!} \varphi^{(i)}(-x).$$

Si, par exemple, on fait $a_i = 1$, la formule (5) donne d'abord

$$\varphi(t - x) = \frac{1}{1-t}\left[1 - \left(\frac{x-t}{x-1}\right)^{n+1}\right];$$

d'où l'on déduit, en développant suivant les puissances de t,

$$\frac{\varphi^{(i)}(-x)}{i!} = 1 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^{n+1} \times \left(1 - \frac{C_{n+1,1}}{x} + \frac{C_{n+1,2}}{x^2} - \ldots \pm \frac{C_{n+1,i}}{x^i}\right).$$

Si l'on porte ce résultat dans la formule (6), on obtient une nouvelle expression des fonctions Q, considérées précédemment. En particulier, pour $x = -1$, on a

$$B_r = \frac{r}{2^n(2^r - 1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} i^{r-1}$$
$$\times (1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n-i-1}),$$

pourvu que $n \geqq r$. Sous une autre forme,

$$B_r = \frac{r}{2^n(2^r - 1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (C_{n,n-i-1}(1^{r-1} - 2^{r-1} + 3^{r-1} - \ldots \pm i^{r-1}).$$

On trouve, pour les nombres de Bernoulli, d'autres expressions analogues, si l'on prend successivement $a_i = i, i^2, i^3, \ldots$. Les formules démontrées dans cet article donnent, d'ailleurs, une foule d'autres résultats, plus ou moins intéressants, qui constituent toujours d'utiles exercices de calcul.

Note. — La formule principale de notre article *Dérivées des fonctions de fonctions* a été précédemment découverte par M. *R. Hoppe,* en 1845. Une formule plus générale, concernant les dérivées d'une fonction quelconque de *plusieurs* fonctions de x, a été publiée par M. *G. Teixeira,* dans le *Journal de Battaglini,* en 1880. Nous donnerons, de cette dernière formule, une démonstration fort simple, basée sur l'emploi de nos signes algorithmiques, et nous chercherons aussi à opérer l'*inversion de la formule de Hoppe,* comme nous l'avons déjà fait, du reste, dans certains cas particuliers.