NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-B. POMEY

Sur un problème de potentiel

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 483-488

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__483_1>

SUR UN PROBLÈME DE POTENTIEL;

PAR M. J.-B. POMEY.

LEMME. — *Étant donnés deux cercles de diamètres* PO *et* PO′, *par le point* P *qui est l'un des points où ces* *cercles se coupent, je mène une sécante quelconque* PCC′, *qui rencontre en* C *et* C′ *les deux cercles. Sur elle, je porte* PD *égal à la somme de* PC *et de* PC′. *Lorsque la sécante tourne autour du point* P, *le point* D *décrit un cercle qui a pour diamètre* PΩ, *le point* Ω *étant obtenu comme extrémité d'une droite égale et parallèle à* PO *menée par le point* O′.

Si, en effet, C, C′ et D sont les projections sur la sécante des points O, O′ et Ω, les points C et C′ sont sur les cercles de diamètres PO et PO′, et l'on a PC = C′D comme projections sur une même droite de deux longueurs égales et parallèles. Alors on a

$$PC + PC' = PD.$$

Le point D étant la projection, sur une droite qui tourne autour de P, d'un point fixe Ω, décrit le cercle qui a pour diamètres PΩ.

On dit que PΩ est la somme géométrique de PO et de PO′. Si l'on avait porté $O'\Omega_1$ égal à O′Ω en sens directement opposé, $P\Omega_1$ aurait été la différence géométrique, et, si j'appelle E la projection de Ω_1 sur la sécante, j'aurai PC′ — PC = PE. Ce point E a pour lieu un cercle décrit sur $P\Omega_1$ comme diamètre. Dans ce qui suit, nous conservons les mêmes notations.

Cela posé, on donne le point fixe P et deux cercles de rayons R et R′ décrits autour de O et de O′ comme centres, il s'agit de mener par P une sécante telle que l'on ait

$$(1) \qquad \overline{PC}^2 - \overline{PC'}^2 = \left(\overline{PO}^2 - R^2\right) - (PO'^2 - R'^2).$$

Interprétons d'abord cette équation. Supposons que les segments interceptés sur la sécante par les cercles O et O′ soient réels : soit 2λ le segment intercepté par la sécante dans le cercle de centre O et de rayon R; en égalant deux expressions de la puissance du point P par rapport au cercle O, on aura

$$(2)\qquad \overline{PO}^2 - R^2 = \overline{PC}^2 - \lambda^2,$$

et, dans le second cercle, on aurait de même

$$(3)\qquad \overline{PO'}^2 - R'^2 = \overline{PC'}^2 - \mu^2,$$

2μ étant le segment intercepté sur la sécante par le cercle de rayon R'; on en déduira que 2μ et 2λ sont égaux, eu égard à l'équation (1). C'est ce qu'elle exprime.

Ainsi l'on demande de mener une sécante sur laquelle les deux cercles interceptent des segments égaux.

Supposons maintenant que ces segments soient imaginaires, et soient t, t' les longueurs des tangentes menées du point P aux cercles O et O'. Avec ces tangentes, que je supposerai réelles, comme rayons, je décris autour du point P comme centre deux cercles (t) et (t'), lesquels interceptent sur OC et sur OC' respectivement deux segments $2\lambda'$ et $2\mu'$. Nous aurons, en égalant, comme précédemment, deux expressions de la puissance des points O et O' par rapport à ces cercles,

$$(4)\qquad \overline{PO}^2 - t^2 = \overline{OC}^2 - \lambda'^2,$$

$$(5)\qquad \overline{PO'}^2 - t'^2 = \overline{OC'}^2 - \mu'^2;$$

mais on a, en ajoutant membre à membre les équations (2) et (4),

$$2\overline{OP}^2 - R^2 - t^2 = \overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 - (\lambda^2 + \lambda'^2).$$

Or on a

$$\overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PO}^2$$

et

$$t^2 = \overline{OP}^2 - R^2,$$

car POC est un triangle rectangle, et de même t, R et OP forment un triangle qui est aussi rectangle.

Il reste donc

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 0.$$

Ainsi, quand λ est imaginaire, λ' est réel, et l'on a

$$\lambda^2 = -\lambda'^2.$$

On aura de même

$$\mu^2 = -\mu'^2.$$

Dans le cas où le premier énoncé n'a pas de sens, on y substituera donc celui-ci, à condition que P soit extérieur aux deux cercles : *Mener par deux points* O *et* O′ *deux droites parallèles sur lesquelles deux cercles concentriques* (t), (t'), *de centre* P, *interceptent deux segments égaux*.

Notre équation (1) revient à

$$(1\ bis) \qquad \mathrm{PD}.\mathrm{PE} = -\left(\overline{\mathrm{PO}}^2 - \mathrm{R}^2\right) + \left(\overline{\mathrm{PO}'}^2 - \mathrm{R}'^2\right).$$

Or, avons-nous vu, les points D et E décrivent deux cercles de diamètres $\mathrm{P}\Omega$ et $\mathrm{P}\Omega_1$. Mais, d'après l'équation (1 *bis*), si le point D décrit un cercle, le point E doit décrire la droite qui en est la transformée inverse réciproque. Ce point devra donc se trouver à l'intersection de cette droite et du cercle décrit sur $\mathrm{P}\Omega_1$ comme diamètre.

La solution de ce problème conduit à un résultat curieux.

Si ds est un élément de courbe, ds' l'élément de sa transformée par rayons vecteurs réciproques, ρ et ρ' les rayons vecteurs, on a

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'};$$

d'où il suit que, si deux arcs finis de courbes transformées l'une de l'autre sont chargés de matière de densité 1, le potentiel au pôle y est le même que celui qui est dû à l'autre.

Soient U et V les potentiels au pôle de deux droites de longueur $2p$ chargées d'une masse de densité 1 et situées aux distances a et a' du pôle, de manière que la perpendiculaire abaissée du pôle sur elles tombe en leurs milieux. On aura pour potentiel en P de la première droite la valeur de l'intégrale suivante où x désigne la distance d'un élément à l'axe mené par P perpendiculairement à la droite dont nous cherchons le potentiel

$$\mathrm{U} = 2\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Je pose

$$\sqrt{a^2+x^2} = -x+t;$$

d'où

$$a^2 = -2tx+t^2$$

et

$$t\,dx + x\,dt = t\,dt$$

ou

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{dt}{t};$$

d'où

$$2\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2\left[\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]_0^p.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\mathrm{U} = \log\frac{p+\sqrt{a^2+p^2}}{a}$$

ou

$$\frac{p+\sqrt{a^2+p^2}}{a} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{U}};$$

d'où

$$p = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\mathrm{U}}{2}} - e^{-\frac{\mathrm{U}}{2}}\right)$$

ou

$$p = a \sin\text{hyp}\,\frac{\mathrm{U}}{2}.$$

Pour l'autre droite à distance a', nous aurons

$$p = a' \sin \operatorname{hyp} \frac{V}{2};$$

d'où

$$\frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{U}{2}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{V}{2}} = \frac{a'}{a}.$$

Si je transforme par rayons vecteurs réciproques, $\frac{a'}{a}$ se change dans le rapport inverse, et j'aurai

$$\frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{U}{2}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{V}{2}} = \frac{a}{a'}.$$

U et V ne changent pas. Les droites deviennent des arcs de cercles, et la solution géométrique donnée plus haut sert à résoudre la question suivante : *Étant donnés deux cercles concentriques* (t), (t') *et deux points* O, O', *mener par* P, *d'une part, et* O, O' *respectivement, d'autre part, deux* CERCLES TANGENTS, *tels que les valeurs en* P *des potentiels* U, V *dus aux parties de ces cercles qui sont extérieures aux cercles donnés* (t) *et* (t') *respectivement satisfassent à la relation*

$$\frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{U}{2}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{V}{2}} = \frac{a}{a'};$$

c'est-à-dire que le rapport des sinus hyperboliques des demi-potentiels est alors celui des rayons des arcs de cercles. Il suffit de faire une transformation par rayons vecteurs réciproques pour construire ces arcs, lorsque le problème est possible.