ERNEST CESÀRO

Le déterminant de Smith et Mansion

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 44-47
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__44_0>

LE DÉTERMINANT DE SMITH ET MANSION;

PAR M. ERNEST CESARO.

---

1. Soit $F(i, j)$ une fonction quelconque du plus grand commun diviseur de i et j. M. Smith a trouvé la valeur du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) & \ldots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) & \ldots & F(2,n) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) & \ldots & F(3,n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ F(n,1) & F(n,2) & F(n,3) & \ldots & F(n,n) \end{vmatrix},$$

dans le cas particulier de $F(x) = x$. M. Mansion a donné, ensuite, l'expression générale de D. Ayant imaginé une fonction f, telle que l'on ait, pour toute valeur de x,

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots,$$

où a, b, c, ... sont les diviseurs de x, M. Mansion a trouvé

$$D = f(1) f(2) f(3) \ldots f(n). \tag{1}$$

Soit $\mu(x)$ une fonction généralement nulle, mais égale à $(-1)^\tau$ lorsque x est le produit de τ facteurs premiers, inégaux. Si la fonction F est *donnée* et si l'on veut connaître f, on a la formule

$$f(x) = \mu\left(\frac{x}{1}\right) F(1) + \mu\left(\frac{x}{2}\right) F(2) + \mu\left(\frac{x}{3}\right) F(3) + \ldots \tag{2}$$

2. Les études des géomètres sur le déterminant D se bornent à la formule (1). Dans l'article *Determinanti in Aritmetica*, inséré au *Journal de Battaglini* (1885),

nous avons fait connaître d'autres résultats, et, en particulier, nous avons démontré que le complément algébrique de l'élément $F(i, j)$ est donné par la formule

$$(3) \qquad A_{i,j} = D \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\mu\left(\frac{\nu}{i}\right) \mu\left(\frac{\nu}{j}\right)}{f(\nu)},$$

et nous en avons déduit que $A_{i,j}$ *est nul lorsque le quotient du plus petit commun multiple par le plus grand commun diviseur de* i *et* j *admet des facteurs carrés.*

3. En nous aidant des relations qui précèdent, nous allons chercher la valeur du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} C & G(1) & G(2) & \dots & G(n) \\ G(1) & F(1, 1) & F(1, 2) & \dots & F(1, n) \\ G(2) & F(2, 1) & F(2, 2) & \dots & F(2, n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(n) & F(n, 1) & F(n, 2) & \dots & F(n, n) \end{vmatrix},$$

que nous écrirons, sous forme abrégée, comme il suit :

$$\Delta = \begin{Vmatrix} C & G(i) \\ G(j) & F(i, j) \end{Vmatrix}_n.$$

Il est évident que

$$\Delta = CD - \sum_{i,j} G(i) G(j) A_{i,j},$$

i et j variant séparément de 1 à n. On a donc, en vertu de (3) et en supposant, pour simplifier, $C = 0$,

$$\Delta = -D \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ \frac{1}{f(\nu)} \sum_{i,j} G(i) G(j) \mu\left(\frac{\nu}{i}\right) \mu\left(\frac{\nu}{j}\right) \right\}.$$

Or il est clair que

$$\sum_{i,j} G(i) G(j) \mu\left(\frac{\nu}{i}\right) \mu\left(\frac{\nu}{j}\right) = \left\{ G(1) \mu\left(\frac{\nu}{1}\right) + G(2) \mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \dots \right\}^2,$$

et, par suite, si l'on imagine une fonction g, qui se déduise de G, comme la fonction f a été déduite de F, on peut écrire, en ayant égard à (2),

$$\Delta = -f(1)f(2)f(3)\ldots f(n)\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{g^2(\nu)}{f(\nu)}.$$

Par exemple,

$$\begin{Vmatrix} 0 & F(i) \\ F(j) & F(i,j) \end{Vmatrix}_n = -f(1)f(2)\ldots f(n)\{f(1)-f(2)-\ldots+f(n)\}.$$

Autre exemple : Si $F(x)$ est le *nombre des diviseurs* de x, et $G(x)$ le *nombre des diviseurs premiers* de x, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & G(i) \\ G(j) & F(i,j) \end{vmatrix}_n$$

représente, en valeur absolue, la *totalité des nombres premiers, non supérieurs à n.*

4. Cherchons, de même, la valeur du déterminant

$$\nabla = \begin{Vmatrix} 0 & G(i) \\ G(j) & A_{i,j} \end{Vmatrix}_n.$$

La considération du déterminant réciproque de D conduit immédiatement à la formule

$$\nabla = -D^{n-2}\sum_{i,j} G(i)G(j)F(i,j).$$

Ordonnons le second membre par rapport à la fonction f. Il est clair que l'on trouve $f(\nu)$ pour les couples de valeurs de i et j, choisies parmi les multiples de ν, non supérieurs à n. Conséquemment

$$\nabla = -D^{n-2}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left[f(\nu)\left\{G(\nu)+G(2\nu)+\ldots+G\left(\left[\frac{n}{\nu}\right]\nu\right)\right\}^2\right].$$

Par exemple, pour $G(x) = 1$, on trouve

$$\nabla = - D^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\frac{n}{\nu}\right]^2 f(\nu).$$

Si l'on imagine une fonction F_0, définie par la relation

$$F_0(x) = \frac{f(a)}{a} + \frac{f(b)}{b} + \frac{f(c)}{c} + \ldots,$$

on obtient définitivement

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & A_{i,j} \end{matrix} \right\|_n = -[f(1)f(2)\ldots f(n)]^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ 2\nu F_0(\nu) - F(\nu) \right\}.$$

Comme dernier exemple, faisons $G(x) = x$, de sorte que

$$\nabla = -\frac{D^{n-2}}{4} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu^2 f(\nu) \left[\frac{n}{\nu}\right]^2 \left\{ \left[\frac{n}{\nu}\right] + 1 \right\}^2.$$

Après quelques transformations simples, on obtient

$$\left\| \begin{matrix} 0 & i \\ j & A_{i,j} \end{matrix} \right\|_n = -[f(1)f(2)\ldots f(n)]^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu^3 F_0(\nu).$$