H. LAURENT

Mémoire sur les équivalences algébriques et l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 432-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__432_1>

MÉMOIRE SUR LES ÉQUIVALENCES ALGÉBRIQUES ET L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

I. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un système de n polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que nous appellerons *diviseurs* et que nous supposerons de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement.

Nous appellerons polynôme *réduit* un polynôme entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne contenant pas de termes divisibles par $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$.

Avec un certain nombre d'auteurs, nous distinguerons dans un terme $a\,x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\lambda$ deux parties, son *argument* $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\lambda$ qui contient les variables et son *coefficient* a.

Le nombre des termes d'un polynôme réduit est $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$. En effet

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_1^{m_1-1})(1 + x_2 + \ldots + x_2^{m_2-1}) \ldots \\ \times (1 + x_n + x_n^2 + \ldots + x_n^{m_n-1})$$

est un polynôme réduit dont tous les coefficients sont égaux à l'unité; le nombre de ses termes est égal à la valeur numérique qu'il prend pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1 :$$

cette valeur est bien $m_1 m_2 \ldots m_n$.

Nous dirons que deux polynômes F et f sont *équivalents* par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et nous écrirons

$$F \equiv f,$$

si l'on a identiquement

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours que :

1° Les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont choisis de telle sorte que les équations

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

ont précisément $m_1 m_2 \ldots m_n = \mu$ solutions communes finies, bien déterminées et distinctes;

2° En désignant les solutions communes de ces équations par

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu}, \end{array}\right.$$

nous supposerons le déterminant

$$(3)\qquad \Delta = \left|\begin{array}{lllll} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{11}^{m_1-1}\alpha_{21}^{m_2-1}\ldots\alpha_{n1}^{m_n-1} \\ 1 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{12}^{m_1-1}\alpha_{22}^{m_2-1}\ldots\alpha_{n2}^{m_n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 & \alpha_{1\mu} & \alpha_{2\mu} & \ldots & \alpha_{1\mu}^{m_1-1}\alpha_{2\mu}^{m_2-1}\ldots\alpha_{n\mu}^{m_n-1} \end{array}\right|$$

différent de zéro. Dans ce déterminant, la $i^{\text{ième}}$ ligne contient tous les arguments réduits que l'on peut former avec les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans lesquels on aurait remplacé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement par $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$; il a donc μ lignes et μ colonnes. Ce déterminant est ce que nous appellerons le *déterminant* des diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Un polynôme réduit est alors bien déterminé quand on se donne les μ valeurs qu'il prend pour μ systèmes de valeurs des variables qui annulent $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

De là résulte qu'un polynôme réduit équivalent à zéro est identiquement nul, et que, par suite, si un polynôme a un équivalent réduit, il ne peut en avoir qu'un seul.

Nous allons maintenant montrer qu'étant donné un polynôme, il existe toujours un polynôme réduit équivalent.

Soient

$$\varphi_1 = \Sigma a_1 x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \qquad \varphi_2 = \Sigma a_2 x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \qquad \ldots$$

les identités qui servent à définir les polynômes φ_1, $\varphi_2, \ldots,$ multiplions la première par tous les arguments d'un polynôme réduit de degré $p - m_1$, la seconde par tous les arguments d'un polynôme réduit de degré $p - m_2$, etc. Désignons par

$$N(x) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)}{1.2.3\ldots x}$$

le nombre des termes d'un polynôme de degré x à n variables; nous aurons alors

$$N(p-m_1) + N(p-m_2) + \ldots + N(p-m_n)$$

identités qui permettront de calculer tous les arguments non réduits d'un degré moindre que p ou égal à p. Il est facile en effet de voir que les identités en question sont en nombre égal ou supérieur à celui des arguments que l'on veut calculer.

Considérons en effet un argument non réduit à calculer; supposons-le divisible par $x_1^{m_1}$, supprimons dans cet argument le facteur $x_1^{m_1}$ il se réduira à un argument de degré $p - m_1$ ou de degré inférieur; si alors on prend tous les arguments de degrés $p - m_1, p - m_2, \ldots, p - m_n$ ou de degrés inférieurs, et si on les multiplie par $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2}$, ..., on aura tous les arguments de degré p à calculer au moins une fois, leur nombre est donc au plus égal à

$$N(p-m_1) + N(p-m_2) + \ldots + N(p-m_n);$$

on aura donc, comme nous l'avions annoncé, autant et même plus d'équations qu'il n'en faut pour calculer tous les arguments non réduits en fonction des autres; en substituant ces valeurs dans un polynôme quelconque F et en négligeant les multiples de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, on aura l'équivalent réduit de ce polynôme F.

Bien que l'on ait en général plus d'équations qu'il n'est nécessaire pour opérer la réduction, on pourrait craindre que les équations du premier degré qui servent à calculer les arguments non réduits fussent incompatibles : nous allons prouver qu'il n'en est rien.

Appelons, en effet, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les arguments non réduits que l'on veut calculer $G_1, G_2, \ldots, G_k$; des expressions équivalentes à zéro, c'est-à-dire de la forme $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n$; enfin $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ des polynômes réduits, les équations qui donnent $r_1, r_2, \ldots$ sont de la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \ldots + a_{1k}r_k = G_1 + \rho_1, \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{2k}r_k = G_2 + \rho_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si leur déterminant était nul, il existerait des multiplicateurs indépendants de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à savoir $\mu_1, \mu_2, \ldots$, donnant lieu à l'identité

$$-(\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 + \ldots) = \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \ldots$$

ou à la formule

$$\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 \ldots \equiv 0.$$

Le polynôme $\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \ldots$ réduit étant nul, on aurait identiquement

$$\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \ldots = 0$$

ou

$$\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 + \ldots = 0.$$

Le système (4) serait alors indéterminé : il y a donc un et un seul polynôme réduit équivalent à un polynôme donné.

Mais il ne faut pas oublier que Δ est supposé essentiellement déterminé et différent de zéro.

Remarque. — Le polynôme réduit équivalent à un polynôme donné ne contient pas en dénominateur les coefficients des diviseurs si ce n'est ceux dont le poids est nul : cela résulte de la manière même dont on calcule la valeur de ce polynôme.

II. Soient z un polynôme réduit, u un autre polynôme réduit dont les coefficients soient des fonctions des coefficients du polynôme z; on pourra dire que u est une fonction de z, mais nous ne considérerons dans la suite que les fonctions ayant une *dérivée* $\frac{du}{dz}$, unique et bien déterminée. Pour que $\frac{du}{dz}$ ait une valeur bien déterminée, certaines équations de condition doivent être satisfaites dont nous nous occuperons plus tard.

Parmi les fonctions du polynôme réduit z, on distingue les fonctions entières qui sont de la forme

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

et qui ont évidemment des dérivées bien déterminées, et les fonctions implicites qui sont définies par des équations ou des équivalences dont les membres sont des fonctions entières de z et des fonctions inconnues. L'équation

$$AX \equiv B,$$

dans laquelle A et B sont des polynômes réduits entiers en z, définit ce que nous appellerons le quotient X de A et B et que nous représenterons par $\frac{A}{B}$; une fraction de la forme $\frac{A}{B}$ sera dite rationnelle, etc.

Les équivalences les plus intéressantes sont relatives à un diviseur unique de la forme $i^\mu \pm 1$, et nous allons tout d'abord les étudier, d'autant plus que les autres se ramènent à celles-ci.

Si l'on fait usage d'un seul diviseur $i^\mu - 1$, un polynôme réduit sera de la forme

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 i^2 + \ldots + z_{\mu-1} i^{\mu-1},$$

et l'équivalent réduit d'un polynôme quelconque sera le reste de la division de ce polynôme par $i^{\mu} - 1$, on pourra obtenir ce reste en remplaçant dans le polynôme en question i^{μ} par 1, $i^{\mu+1}$ par i, et en général i^k par $i^{k'}$, k' désignant le reste de la division de k par μ.

Une fonction de z sera de la forme

$$u = u_0 + u_1 i + u_2 i^2 + \ldots + u_{\mu-1} i^{\mu-1},$$

$u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}$ désignant des fonctions de $z_0, z_1, \ldots, z_{\mu-1}$. Cherchons la condition pour que la fonction u ait une dérivée $\frac{du}{dz}$ bien déterminée; on a

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sum\left(\frac{\partial u_0}{\partial z_k} + i\frac{\partial u_1}{\partial z_k} + \ldots + i^{\mu-1}\frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_k}\right) dz_k}{\Sigma\, i^k\, dz_k},$$

et pour que $\frac{du}{dz}$ soit bien déterminé et ne dépende pas des rapports $dz_1, dz_2, \ldots, dz_{\mu-1}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + i\frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \ldots + i^{\mu-1}\frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_0},\\
&= i^{\mu-1}\frac{\partial u_0}{\partial z_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \ldots + i^{\mu-2}\frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_1},\\
&= i^{\mu-2}\frac{\partial u_0}{\partial z_2} + i^{\mu-1}\frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \ldots + i^{\mu-3}\frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial z_0} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u_2}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial u_{\mu-1}}{\partial z_{\mu-1}},\\
&\frac{\partial u_1}{\partial z_0} = \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = \frac{\partial u_3}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial u_0}{\partial z_{\mu-1}},\\
&\frac{\partial u_2}{\partial z_0} = \frac{\partial u_3}{\partial z_1} = \frac{\partial u_4}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial u_1}{\partial z_{\mu-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Ces équations expriment que

$$\begin{array}{l} u_0\,dz_0 + u_{\mu-1}\,dz_1 + u_{\mu-2}\,dz_2 + \ldots + u_1\,dz_{\mu-1}, \\ u_1\,dz_0 + u_0\,dz_1 \quad + u_{\mu-1}\,dz_2 + \ldots + u_2\,dz_{\mu-1}, \\ u_2\,dz_0 + u_1\,dz_1 \quad + u_0\,dz_2 \quad + \ldots + u_3\,dz_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ou que

$$\begin{array}{l} (u_0 + u_1\,i + u_2\,i^2 + \ldots + u_{\mu-1}\,i^{\mu-1}) \\ \quad \times (dz_0 + i\,dz_1 + \ldots + i^{\mu-1}\,dz_{\mu-1}) \end{array}$$

sont des différentielles exactes. De là un moyen d'écrire *a priori*, et sans effectuer de différentiations, une infinité d'expressions qui sont des différentielles exactes. Si l'on prend par exemple $u = z_0 + z_1\,i + z_2\,i^2 + \ldots$, on formera les différentielles exactes

$$\begin{array}{l} z_0\,dz_0 + z_{\mu-1}\,dz_1 + \ldots + z_1\,dz_{\mu-1}, \\ z_1\,dz_0 + z_0\,dz_1 \quad + \ldots + z_2\,dz_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si nous appelons conjuguées d'une expression réduite

$$z_0 + z_1\,i + \ldots + z_{\mu-1}\,i^{\mu-1} = f(i)$$

les expressions $f(i^2), f(i^3), \ldots, f(i^\mu)$ que l'on obtient en remplaçant i par ses puissances, il est facile de voir que le produit de μ expressions conjuguées est équivalent à une expression indépendante de i ; l'expression

$$f(i)\,f(i^2)\ldots f(i^\mu)$$

est, en effet, le premier membre de la résultante des équations

$$f(x) = 0, \qquad x^\mu - 1 = 0,$$

lorsque l'on suppose i racine $\mu^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire quand on remplace $i^{k\mu+\nu}$ par i^ν, et l'on a d'ailleurs

$$f(i)\,f(i^2)\ldots f(i^\mu) = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_{\mu-1} \\ z_{\mu-1} & z_0 & \ldots & z_{\mu-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_0 \end{vmatrix};$$

il est facile de vérifier la formule

$$\begin{vmatrix} du_0 & du_1 & \ldots & du_{\mu-1} \\ du_{\mu-1} & du_0 & \ldots & du_{\mu-2} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ du_1 & du_2 & \ldots & du_0 \end{vmatrix} = \frac{\partial(u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1})}{\partial(z_0, z_1, \ldots, z_{\mu-1})} \begin{vmatrix} dz_0 & dz_1 & \ldots & dz_{\mu-1} \\ dz_{\mu-1} & dz_0 & \ldots & dz_{\mu-2} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ dz_1 & dz_2 & \ldots & dz_0 \end{vmatrix}.$$

Les formules (1) sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable; désignons par θ_0 la valeur commune des dérivés qui figurent dans la premièreligne, par θ_1 la valeur commune des dérivées qui figurent dans la seconde, etc., et supposons que $z_0, z_1, \ldots, z_{\mu-1}$ désignent les normales menées d'un point M à des plans fixes formant un angle polyèdre à faces égales et à angles égaux. Les équations

$$u_0 = a_0, \qquad u_1 = a_1, \qquad \ldots, \qquad u_{\mu-1} = a_{\mu-1},$$

dans lesquelles $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ désignent des constantes arbitraires, représenteront μ familles de surfaces. Considérons les surfaces qui passent par le point M; pour avoir la normale en ce point à la surface $u_0 = a_0$, il faudra, en vertu d'un théorème bien connu de Poinsot, porter sur les droites $z_0, z_1, \ldots, z_{\mu-1}$ des longueurs égales à $\frac{\partial u_0}{\partial z_0}, \frac{\partial u_0}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial z_{\mu-1}}$ ou à $\theta_0, \theta_{\mu-1}, \theta_{\mu-2}, \ldots, \theta_1$ et en prendre la résultante. Pour avoir la normale en M à la surface $u_1 = a$, il faudra porter sur les droites z_0, $z_1, \ldots, z_{\mu-1}$ des longueurs égales à $\theta_1, \theta_0, \theta_{\mu-1}, \ldots, \theta_2$, et en prendre la résultante, et ainsi de suite. Les normales construites ainsi formeront alors elles-mêmes les arêtes d'un angle polyèdre ayant ses angles égaux et ses faces égales; ainsi :

On peut, et cela d'une infinité de manières, trouver des familles de surfaces, telles que les plans tangents en leurs points communs forment un angle polyèdre ayant ses faces et ses angles égaux.

Il existe évidemment un théorème analogue relatif à la Géométrie plane que nous pouvons nous dispenser d'énoncer. Nous donnerons seulement quelques exemples de surfaces remplissant les conditions énoncées.

Supposons $\mu = 3$; il existera des fonctions X, Y, Z de x, y, z donnant lieu aux équations aux dérivées partielles simultanées

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \\ \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \end{aligned}\right.$$

si l'on suppose successivement

$$\begin{aligned} X + iY + i^2 Z &= (x + iy + i^2 z)^2, \\ X + iY + i^2 Z &= (x + iy + i^2 z)^3, \\ X + iY + i^2 Z &= (x + iy + i^2 z)^{-1}, \end{aligned}$$

on est conduit aux systèmes suivants de surfaces qui, en leurs points de rencontre, ont des plans tangents formant des trièdres à faces égales et à angles égaux (a, b, c sont des constantes arbitraires) :

$$x^2 + 2yz = a, \qquad y^2 + 2xz = b, \qquad z^2 + 2xy = c;$$

$$\left\{\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz &= a, \\ 3x^2y + 3y^2z + 3z^2x &= b, \\ 3xy^2 + 3yz^2 + 3zx^2 &= c; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + a(x^2 - yz) &= 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + b(y^2 - zx) &= 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + c(z^2 - xy) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions X, Y, Z satisfont, en vertu de (2), aux équations suivantes aux dérivées partielles, ainsi qu'il est bien facile de le vérifier,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y};$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 X}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 X}{\partial z^3} - 3\,\frac{\partial^3 X}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On connaît ainsi une infinité de solutions de ces équations aux dérivées partielles, et ces solutions peuvent s'écrire en termes finis. Chaque diviseur que l'on choisira fournira des types d'équations aux dérivées partielles dont on pourra obtenir avec facilité une infinité d'intégrales sous forme finie.

III. Revenons au cas général où l'on considère un système de diviseurs quelconques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ fonctions de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Supposons toujours le déterminant Δ de ces diviseurs fini et différent de zéro, ce qui exige que les $\mu = m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right.$$

des équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

soient finies et distinctes.

Nous avons vu qu'il existait toujours un polynôme réduit prenant μ valeurs données pour les systèmes de valeurs des x annulant à la fois les φ, et que ce polynôme était bien déterminé; on peut calculer ce polynôme comme il suit :

Soit Δ_i ce que devient le déterminant Δ des diviseurs quand on y remplace α_{1i} par x_1, α_{2i} par x_2, ..., α_{ni} par x_n; Δ_i s'annulera pour tous les systèmes de valeurs des x annulant les φ, excepté pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ..., $x_n = \alpha_{ni}$, et alors, pour ce système de valeurs, il se réduira à Δ. Le polynôme

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \mathrm{P}_i \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

se réduira donc, quel que soit i, à P_i pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...; l'équivalent réduit d'un polynôme qui prend des valeurs déterminées pour les systèmes de valeurs des x qui annulent les φ est donc bien déterminé, puisque ses valeurs, pour des valeurs des x qui annulent les φ, sont bien déterminées; le polynôme en question, en appelant f son équivalent réduit, est de la forme

$$f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n;$$

enfin on voit que l'expression générale d'un polynôme, nul en même temps que les φ, est de la forme

$$\lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n,$$

puisque son équivalent réduit est nul. Ces conclusions, bien entendu, sont toujours soumises à cette restriction que Δ est fini et différent de zéro.

Nous allons maintenant nous proposer, pour la théorie des équivalences algébriques, une série de questions analogues à celles qui se présentent dans la théorie des équations. Et d'abord nous allons nous proposer de résoudre l'équivalence du premier degré

$$\mathrm{AX} \equiv \mathrm{B}. \tag{3}$$

A et B étant deux polynômes que l'on peut supposer réduits, il s'agit de trouver un polynôme réduit X satisfaisant à cette équivalence ou à l'identité

$$(4) \qquad AX = B + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n.$$

Appelons $A_1, A_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$ les valeurs que prennent A et B pour les systèmes de valeurs des x contenus dans le Tableau (1), en général pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$; la formule (3) donne

$$A_i X = B_i \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{B_i}{A_i};$$

si donc nous supposons $A_1, A_2, \ldots$ différents de zéro, le polynôme X sera déterminé par cette condition qu'il devra prendre des valeurs données quand les φ s'annuleront; soit X un polynôme déterminé par cette condition de se réduire à $\frac{B_i}{A_i}$ pour $x_1 = \alpha_{1i}, \ldots$ et d'être réduit, il satisfera à l'identité (4) ou à la congruence (3), car $AX - B$, étant nul avec les φ, sera bien de la forme $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n$.

Ainsi le polynôme réduit X existe et est bien déterminé quand A ne s'annule pas avec les φ.

A est ce que l'on peut appeler le diviseur, B le dividende et X le quotient de la division de B par A.

La division, dans la théorie des équivalences algébriques, n'est donc possible que quand le diviseur ne s'annule pas avec les polynômes diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Occupons-nous maintenant de la recherche du quotient. Si l'on pose

$$X = \Sigma q\, x_1^i x_2^j \ldots x_n^k,$$

et si l'on réduit le produit AX, on obtiendra un polynôme qui, identifié à B, fournira μ égalités qui, résolues par rapport à $q_1, q_2, \ldots$, fourniront les coefficients de X et, par suite, X lui-même. X sera alors mis sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D désignant des polynômes entiers par rapport aux coefficients de A et des φ; D ne dépend pas de B; pour le calculer, on peut supposer $B = 1$; on a alors

$$A\frac{N}{D} \equiv 1 \qquad \text{ou} \qquad AN \equiv D,$$

formule qui donne

$$D = AN.$$

Quand les φ sont nuls à la fois, si N_i est la valeur de N pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ..., on a

$$D = A_1 N_1, \qquad D = A_2 N_2, \qquad \ldots :$$

donc D est divisible par A_1, A_2, ... et, par suite, par $A_1 A_2 \ldots A_\mu$, car $A_1 A_2 \ldots$, du premier degré par rapport aux coefficients de A, sont, en général, inégaux; ainsi

$$D = G A_1 A_2 \ldots A_\mu,$$

G désignant un polynôme entier par rapport aux coefficients de A et des φ, et l'on peut ajouter de degré o par rapport aux coefficients de A. Si l'on appelle R le premier membre de la résultante des équations

$$(5) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0, \qquad A = 0,$$

on pourra écrire

$$D = RG;$$

mais, D et R étant de poids μ par rapport aux coefficients des φ, G est de poids zéro : $D = 0$ est donc l'une des formes de la résultante des équations (5).

Il résulte de là ce fait important :

Pour trouver la résultante des équations (5), *il suffit de trouver le dénominateur du quotient de* B *par* A, B *désignant un polynôme quelconque.*

Ce dénominateur, qui se présente sous la forme d'un déterminant indépendant de B, est ce que nous appellerons le module de A.

On peut déduire de là un moyen très simple pour former la résultante des équations (5) et que j'ai formulé, pour la première fois, dans mon *Traité d'Analyse,* sans démonstration :

Pour former la résultante des équations (5), *multipliez* A *successivement par les* μ *arguments réduits et réduisez les produits ainsi formés; soient* A_0, A_1, ..., A_μ *les résultats ainsi obtenus; considérez, dans les équations*

$$(6) \qquad A_0 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_\mu = 0,$$

les arguments réduits comme des inconnues distinctes, la résultante des équations (6) *sera la résultante cherchée.*

En effet, le premier membre de la résultante des équations (6) est un déterminant qui a les mêmes éléments que celui que l'on obtiendrait en multipliant A par un polynôme réduit $\Sigma q x_1^i x_2^j \ldots x_n^k$, en égalant à des quantités données les coefficients des arguments réduits, et en cherchant le dénominateur commun des valeurs des quantités q.

Cette méthode a beaucoup d'analogie, comme l'on voit, avec celle que M. Sylvester a fait connaître pour le cas de deux équations; elle ne se confond pourtant pas avec elle dans ce cas, et, même dans ce cas, elle est nouvelle quant à la forme; pour le fond, elle coïncide avec celle de Cauchy ou de M. Cayley, elle revient à ceci :

Pour éliminer x entre les équations

$$A(x) = 0, \qquad \varphi(x) = 0,$$

divisez $A(x)$, $xA(x)$, ..., $x^{m-1}A(x)$ [*où m est le degré de* $\varphi(x)$] *par* $\varphi(x)$. *Soient* A_0, A_1, ..., A_{m-1} *les restes* (*et, pour trouver ces restes, il n'y a au fond besoin de faire qu'une seule division*), *la résultante cherchée est le résultat de l'élimination de* x, x^2, ..., x^{m-1} *entre*

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{m-1} = 0.$$

Des considérations précédentes, il résulte qu'un produit de plusieurs facteurs peut être équivalent à zéro sans qu'aucun de ses facteurs supposés réduits, si l'on veut, soit nul.

La résolution d'un système de plusieurs équivalences du premier degré

$$\begin{array}{l} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1p}X_p \equiv B_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p1}X_1 + A_{p2}X_2 + \ldots + A_{pp}X_n \equiv B_p, \end{array}$$

où les A et les B sont, si l'on veut, des polynômes réduits, ne présente aucune difficulté; en posant, en effet,

$$\theta = \Sigma \pm A_{11}A_{22}\ldots A_{pp},$$

on déduit des formules précédentes

$$X_1\theta \equiv B_1\frac{\partial\theta}{\partial A_{11}} + B_2\frac{\partial\theta}{\partial A_{21}} + \ldots + B_p\frac{\partial\theta}{\partial A_{p1}};$$

d'où l'on peut tirer X, comme on l'a montré tout à l'heure. On peut aussi remarquer que les X sont connus pour les valeurs des x qui annulent les φ. Cette théorie donne lieu à une discussion qui ne présente aucune difficulté. (*A suivre*)