A. RÉMOND

Sur un système de coniques dont l'équation a ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 424-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__424_1>

SUR UN SYSTÈME DE CONIQUES DONT L'ÉQUATION A SES COEFFICIENTS FONCTIONS LINÉAIRES DE DEUX PARAMÈTRES;

PAR M. A. RÉMOND,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

1. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de discuter la nature et la position d'une conique Γ dont l'équation a tous ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres variables.

Salmon a montré (*Sections coniques*, p. 388) que l'étude de certaines propriétés d'un système de coniques dont l'équation est

$$(1) \qquad \alpha U + \beta V + W = 0,$$

α, β étant deux indéterminées, $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ les équations de trois coniques du plan, est intimement liée à celle des courbes du troisième ordre. Certains résultats lui sont fournis avec beaucoup d'élégance (*Courbes planes*) par les propriétés des formes algébriques.

On peut, en modifiant la forme de l'équation (1), faire l'étude de ce système de coniques sans sortir du programme de la classe de Mathématiques spéciales.

Posons (axes rectangulaires)

$$\begin{aligned}
U &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,\\
V &= A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F',\\
W &= A''x^2 + 2B''xy + C''y^2 + 2D''x + 2E''y + F''.
\end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned}
\alpha U + \beta V + W = (A\alpha + A'\beta + A'')x^2&\\
+ 2(B\alpha + B'\beta + B'')xy + \ldots &= 0,
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire, X, Y, ... désignant des fonctions linéaires de α, β,

$$Xx^2 + 2Zxy + Yy^2 + 2X'x + 2Y'y + Z' = 0.$$

Nous désignerons par M le point dont les coordonnées sont (α, β), et nous supposerons construit le triangle de référence dont les côtés sont

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

I. — Nature des coniques représentées par cette équation.

2. Nous voyons, en formant la fonction *caractéristique*

$$\delta = XY - Z^2,$$

que la conique Γ est une parabole si le point M se meut sur la conique Γ' ayant pour équation

$$XY - Z^2 = 0.$$

Γ' est tangente aux droites $X = 0$, $Y = 0$, à leur rencontre avec la droite $Z = 0$; elle est dans la région du plan où les fonctions X, Y donnent un produit positif.

Deux cas peuvent se présenter suivant que les points situés à l'intérieur du triangle de référence ABC sont dans une région où le produit des fonctions X, Y est positif ou négatif.

a. La conique Γ' est alors tangente intérieurement aux droites $X = 0$, $Y = 0$: c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole; dans le cas d'une parabole, on peut la construire avec la règle seule, la double droite $Z^2 = 0$ formant une parabole singulière passant aux quatre points de rencontre de $X = 0$, $Y = 0$ avec $Z^2 = 0$.

b. Dans la seconde hypothèse, la conique Γ', tangente extérieurement aux droites $X = 0$, $Y = 0$, est une hyperbole.

Remarque. — Les droites

$$\begin{cases} X + Y = 0, \\ X - Y = 0, \end{cases}$$

conjuguées harmoniques de $X = 0$, $Y = 0$, forment avec $Z = 0$ un triangle polaire conjugué AED par rapport à la conique Γ'; le sommet

$$D \begin{cases} X - Y = 0, \\ Z = 0 \end{cases}$$

est toujours intérieur à la conique Γ', et $X + Y = 0$ est le côté du triangle autopolaire opposé au sommet intérieur à la conique.

La conique Γ' est effective tant que les droites $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ forment un triangle de référence. Si l'une des droites $X = 0$, $Y = 0$ s'éloigne indéfiniment, Γ' devient une parabole; si $Z = 0$ s'éloigne à l'infini, Γ' devient une hyperbole asymptote aux côtés restant à distance finie.

3. Quand le point D est à distance finie, il est intéressant de considérer le cas où ce point devient un foyer de Γ'. On peut écrire l'équation de cette conique

$$\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + Z^2 = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2,$$

en mettant en évidence les tangentes issues du sommet D du triangle autopolaire.

Ce sommet sera foyer si les tangentes qui en partent sont les droites isotropes. Dans ce cas, la droite

$$X + Y = 0$$

est la directrice correspondant à ce foyer.

En revenant au signe de

$$\delta = XY - Z^2,$$

nous voyons que le point $A \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ est toujours dans la région négative déterminée par la conique Γ'; dès lors la région dans laquelle se trouve le point A est en même temps celle dans laquelle doit se mouvoir le point $M(\alpha, \beta)$ pour que la conique Γ soit une hyperbole. La région opposée est celle dans laquelle doit se mouvoir le point M pour que Γ soit une ellipse.

4. Les positions du point M, pour lesquelles Γ est une hyperbole équilatère, sont situées sur la droite

$$X + Y = 0.$$

Il existe une seule position de M qui donne à l'hyperbole des directions asymptotiques déterminées.

Quand M vient en A, l'hyperbole équilatère Γ a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; quand il vient en E, les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux bissectrices de ces axes.

5. Il existe, en général, une position unique du point M pour laquelle la conique Γ devient un cercle; il faut, en effet, que l'on ait simultanément

$$\left\{\begin{aligned} Z &= 0, \\ X - Y &= 0. \end{aligned}\right.$$

Cette position unique est celle du point D.

Il en résulte que, si D est un foyer de Γ', les positions du point M, telles que Γ soit une hyperbole équilatère, sont sur la directrice correspondant à ce foyer.

II. — Cas ou la conique Γ devient un système de droites.

6. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que, au lieu de six fonctions linéaires différentes, il n'entre dans l'équation étudiée que trois fonctions X', Y', Z', et nous poserons

$$X' = aX,$$
$$Y' = bY,$$
$$Z' = cZ,$$

a, b, c étant des coefficients numériques, ainsi que d, e, f des équations suivantes.

Les termes du premier degré et le terme indépendant qu'on écrit généralement

$$2Dx + 2Ey + F$$

s'obtiendront en remplaçant les coefficients D, E, F par les fonctions X', Y', Z' permutées entre elles. Six équations sont à discuter

$$
\begin{aligned}
&aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eYy + fZ = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dYx + 2eXy + fZ = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dXx + 2eZy + fY = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dZx + 2eXy + fY = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dZx + 2eYy + fX = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2dYx + 2eZy + fX = 0.
\end{aligned}
$$

Un cas intéressant est celui où les coefficients numériques $a, b, \ldots, f$ sont égaux entre eux. Nous indiquerons le résultat relatif à ce cas chaque fois qu'il sera utile à connaître.

7. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eYy + fZ = 0$$

l'équation de la conique Γ.

On peut écrire le discriminant de la fonction premier membre

$$\Delta = (acf + 2bde)XYZ - ae^2XY - cd^2YX^2 - fb^2Z^3$$

ou

$$\Delta = XY(\lambda Z + \mu X + \nu Y) - fb^2Z^3.$$

Γ sera donc un système de deux droites quand le point M sera mobile sur la cubique C :

$$XY(\lambda Z + \mu X + \nu Y) - \pi Z^3 = 0.$$

Cette équation met en évidence la droite des trois points d'inflexion $Z = 0$ et les tangentes en ces points

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \lambda Z + \mu X + \nu Y = 0,$$

etc.

8. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eXy + fZ = 0$$

l'équation de la conique Γ.

Ce sera un système de deux droites si le point M se meut sur la courbe C dont l'équation est

$$\lambda XYZ + \mu X^3 + \nu Y^3 + \pi Z^3 = 0,$$

cubique non singulière (forme canonique de Salmon, *Courbes planes*).

Dans le cas particulier où les coefficients numériques a, b, ..., f sont égaux, le discriminant devient

$$3XYZ - X^3 - Y^3 - Z^3 = 0,$$

et la cubique précédente se décompose en une droite

$$X + Y + Z = 0$$

et une conique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - ZX - ZY - XY = 0.$$

9. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eZy + fY = 0$$

l'équation de la conique Γ.

La cubique C, sur laquelle doit se mouvoir le point M pour que Γ soit un système de deux droites, a pour équation

$$Z^2(\lambda X + \mu Y) - XY(\lambda' X + \mu' Y) = 0,$$

où l'on a, en évidence, trois tangentes

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \lambda' X + \mu' Y = 0,$$

issues d'un même point; la droite $Z = 0$ des points de contact de ces tangentes, etc.

Dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, la cubique précédente se décompose en une droite

$$X - Y = 0$$

et la conique Γ′

$$XY - Z^2 = 0;$$

Γ ne peut donc pas être une parabole effective, etc.

10. Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dZx + 2eXy + fY = 0$$

l'équation de la conique Γ.

Celle de la cubique C peut s'écrire

$$Z^2[\lambda X + \mu Y] - X[\lambda'^2 X^2 \pm \mu'^2 Y^2] = 0,$$

même forme que la précédente; deux tangentes étant tantôt réelles, tantôt imaginaires, etc.

Dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, cette équation devient

$$(X - Y)[2Z^2 - X(X + Y)] = 0.$$

11. L'équation de la conique Γ étant

$$aXx^2 + 2bZxy + CYy^2 + 2dZx + 2eYy + fX = 0,$$

l'équation de la cubique C peut s'écrire

$$Z^2(\lambda Y + \mu X) - XY(\lambda' Y + \mu' X) = 0 \qquad (\text{voir } c).$$

12. L'équation de Γ étant

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eZy + fX = 0,$$

la cubique C a pour équation

$$Y^2(\lambda X + \mu Y) - Z^2(\lambda' X + \mu' Y) = 0.$$

Dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, cette cubique se décompose en

$$\left\{\begin{array}{r} X - Y = 0, \\ Y(X + Y) - Z^2 = 0. \end{array}\right.$$

Nota. — Dans l'indication des résultats généraux qui précèdent, nous n'avons pas parlé des systèmes de droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, parallèles ou se coupant; nous n'avons pas non plus distingué les positions du point M qui donnent des ellipses réelles de celles qui donnent des ellipses imaginaires.

Les courbes, lieux de M, qui séparent les régions du plan correspondant à ces diverses propriétés sont des coniques dont on détermine facilement la position par rapport au triangle de référence

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Nous ferons seulement remarquer que la connaissance des résultats de la discussion de l'équation générale, dans le cas où les coefficients a, b, ..., f sont égaux, permet de former très rapidement des équations générales de coniques renfermant deux paramètres et dont l'étude complète n'exige pas la connaissance de propriétés autres que celles des courbes du second ordre.

Cette remarque permettra de combler la lacune regrettable qui existe, à ce sujet, dans les exercices proposés dans les divers Traités de Géométrie analytique.