G. FOURET

Sur une généralisation de la quadratrice

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 39-43
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__39_1>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA QUADRATRICE;

PAR M. G. FOURET.

1. Les courbes dont l'équation polaire est de la forme

$$\rho = a\,\frac{\omega - \alpha}{\sin \omega} \tag{1}$$

sont intimement liées à la *Quadratrice de Dinostrate* (¹), qui correspond au cas particulier où α est nul. Le mode de description mécanique de ces courbes, qui résulte immédiatement de leur équation, est analogue de tout point à celui par lequel les géomètres anciens définissaient la quadratrice. Une analogie plus remarquable encore réside dans ce fait que *ces courbes peuvent être considérées comme les projections orthogonales*

(¹) Cette courbe est célèbre à plus d'un titre : on sait notamment que les Anciens la faisaient servir à une prétendue solution des problèmes de la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle. Il est très présumable, et M. Paul Tannery a ajouté dans ces derniers temps (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 2ᵉ série, t. VII, p. 278) un nouveau degré de probabilité à cette opinion, que la quadratrice est, parmi les courbes transcendantes, la plus anciennement connue.

des sections planes d'une même surface de vis à filet carré, arbitrairement choisie, sur un plan perpendiculaire à l'axe de cette surface.

Conformément à un théorème bien connu dû à Pappus, on obtient une quadratrice proprement dite, lorsque le plan sécant passe par une des génératrices rectilignes de la surface de vis.

La généralisation que je viens d'indiquer du théorème de Pappus avait déjà été signalée par Chasles, dans une note au bas de la page 32 de l'*Aperçu historique* (2e édition), sauf une légère erreur consistant à assimiler la courbe obtenue à une *conchoïde* de la quadratrice ordinaire. Il m'a paru de quelque intérêt de rectifier l'énoncé donné par l'illustre géomètre et d'établir, par la démonstration simple qui va suivre, le résultat exact.

2. La figure étant rapportée à deux plans de projection, l'un, le plan horizontal, perpendiculaire à l'axe de la surface de vis, et contenant une génératrice parallèle au plan (P) de la section, l'autre vertical et perpendiculaire à ce plan (P), cherchons l'équation polaire de la projection horizontale de la courbe de section, en prenant pour pôle le pied O de l'axe de la surface, et pour axe polaire la génératrice Ox perpendiculaire à la ligne de terre.

Soient i l'angle du plan (P) avec le plan horizontal, h le pas de la surface de vis, et k la cote $O'O''$ du point (O, O'') d'intersection du plan (P) avec l'axe de la surface. Imaginons un plan horizontal quelconque rencontrant l'axe au point (O, O'''); il coupe la surface de vis suivant une génératrice dont la projection horizontale OG passe par le pied de l'axe, et le plan (P) suivant une perpendiculaire au plan vertical sur laquelle on obtient immédiatement un point (M, M') de la courbe de section.

Posons $OM = \rho$ et $\widehat{MOx} = \omega$. On a

$$O'''M' = O''O''' \times \cot i = (O'O''' - O'O'') \cot i = \left(\frac{h\omega}{2\pi} - k\right) \cot i.$$

Mais, MN étant la perpendiculaire abaissée de M sur Ox, on a d'autre part

$$O'''M' = NM = \rho \sin\omega;$$

on en conclut

$$\rho \sin\omega = \left(\frac{h\omega}{2\pi} - k\right) \cot i,$$

ou bien

(1) $$\rho = a\,\frac{\omega - \alpha}{\sin\omega},$$

en posant

(2) $$a = \frac{h \cot i}{2\pi},$$

(3) $$\alpha = 2\pi\,\frac{k}{h}.$$

On retrouve ainsi l'équation de la quadratrice généralisée, qui devient la quadratrice elle-même, dans l'hypothèse où α, c'est-à-dire k, est nul, ce qui revient à supposer que le plan passe par une génératrice de la surface [1].

3. Il est à remarquer qu'en coupant une surface de vis à filet carré arbitrairement choisie par des plans de position et d'inclinaison variables, on peut obtenir toutes les courbes que donne l'équation (1), quand on y fait varier à volonté les paramètres a et α. Cela résulte de ce que, pour une valeur donnée de h, on peut, en vertu

---

[1] Il est plus exact de dire que, dans ce cas, la courbe de section se décompose en deux parties : la génératrice contenue dans le plan sécant, et une courbe qui se projette suivant la quadratrice.

des relations (2) et (3), choisir i et k, de manière à avoir pour a et α telles valeurs que l'on veut.

On peut remarquer encore que les divers plans passant par une même droite perpendiculaire à l'axe de la surface de vis fournissent un système simplement infini de courbes défini par l'équation (1), dans laquelle a varie seul, α restant constant. On obtient le système simplement infini répondant au cas où α varie seul, a restant constant, en coupant la surface de vis par une série de plans parallèles.

4. On pourrait construire la tangente en un point quelconque de la quadratrice généralisée, soit en s'appuyant sur son mode de génération mécanique et se servant de la méthode de Roberval, soit en la faisant dériver, comme on vient de le voir, de la surface de vis à filet carré et appliquant les procédés de la Géométrie descriptive. Mais on arrive à une construction plus simple, de la manière suivante.

Portons sur la partie positive de l'axe polaire Ox, un segment $OA = a$, et supposons construite la courbe inverse de la courbe (1), en prenant le point O comme pôle et a^2 comme paramètre de la transformation. L'équation de cette courbe inverse étant, par suite,

$$(4) \qquad \rho_1 = a\,\frac{\sin\omega}{\omega - \alpha};$$

l'angle V, formé par la tangente en un point quelconque M_1 de cette dernière courbe [1], avec le rayon

[1] Cette courbe est la projection, sur un plan perpendiculaire a l'axe, d'une surface de vis à filet carré, de la courbe d'ombre de cette surface éclairée par des rayons convergents (*Nouvelles Annales,* 2e série, t. XIX, p. 33).

vecteur qui y aboutit, est donné par la relation

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho_1}{\rho'_1} = \frac{a \sin \omega}{a \cos \omega - \rho_1}.$$

Or, P étant la projection de A sur OM_1, on a

$$a \sin \omega = PA, \qquad a \cos \omega = OP, \qquad a \cos \omega - \rho_1 = PM_1;$$

d'où l'on conclut que l'angle V est égal à l'angle $\widehat{AM_1P}$, et par suite que la tangente en M_1 à la courbe (4) passe par le point I symétrique de A par rapport à OM_1 (¹).

Cela posé, l'inversion qui nous fait passer de la courbe (4) à la courbe (1) transforme la tangente $M_1 I$ en une circonférence qui touche la courbe (1) au point M inverse de M_1, et qui contient les points O et I, ce dernier point n'étant pas atteint par la transformation, puisque l'on a

$$OI = OA = a.$$

Mais l'angle $\widehat{OIM}$ est inscrit dans un segment capable de l'angle formé par le rayon vecteur OM et la tangente en M à la courbe (1) dirigée dans le sens où croît l'angle polaire. D'ailleurs les angles $\widehat{OIM}$ et $\widehat{OAM}$ sont égaux, étant symétriques par rapport à OM.

Par suite, *la tangente à la quadratrice ordinaire ou généralisée, en un point quelconque, fait, avec le rayon vecteur qui y aboutit, un angle égal à celui sous lequel ce rayon vecteur est vu d'un certain point fixe.*

(¹) Cette construction a déjà été obtenue précédemment, comme cas particulier d'un problème plus général (*loc. cit.*, p. 35).