NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

De la déviation dans l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 370-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__370_1>

DE LA DÉVIATION DANS L'ELLIPSE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

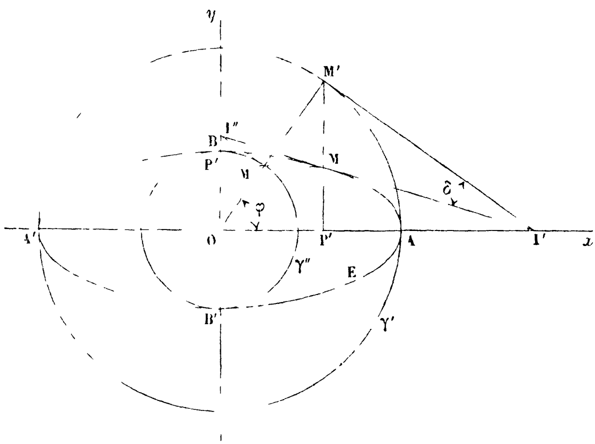
1. Soient γ' et γ'' deux cercles concentriques. Par le centre O de ces cercles menons deux axes rectangulaires Ox et Oy.

Si une droite $OM''M'$ qui coupe le cercle γ' en M' et le cercle γ'' en M'' pivote autour du point O, et que, pour chaque position de cette droite, on tire la droite $M'M$ parallèle à Oy et la droite $M''M$ parallèle à Ox, le lieu du point de rencontre M de ces deux droites est une ellipse E ayant pour grand axe le diamètre AA' du cercle γ' dirigé suivant Ox et pour petit axe le diamètre BB' du cercle γ'' dirigé suivant Oy.

C'est là un résultat connu, et d'ailleurs bien facile à établir.

Le cercle γ' est ce qu'on appelle le *cercle principal* de l'ellipse E. C'est le lieu des projections des foyers réels de l'ellipse E sur les tangentes à cette courbe. De même le cercle γ'' est le lieu des projections des foyers

Fig. 1.



imaginaires de l'ellipse E sur ses tangentes. On pourrait l'appeler le *second cercle principal.*

Le rapport $\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{MP'}}$ étant constant, les tangentes M'T' et MT' qui se correspondent sur le premier cercle principal γ' et sur l'ellipse E se coupent en T', sur l'axe $\mathrm{O}x$. C'est encore une propriété bien connue dont la démonstration est des plus faciles.

De même le point de rencontre T'' des tangentes à l'ellipse E au point M et au cercle γ'' au point M'' se trouve sur $\mathrm{O}y$.

En somme, la tangente en M s'obtient en joignant le point de rencontre T' de la tangente en M' avec $\mathrm{O}x$, au point de rencontre T'' de la tangente en M'' avec $\mathrm{O}y$.

Les tangentes M'T' et M''T'' sont parallèles. J'appelle *déviation de l'ellipse au point* M *l'angle que la tan-*

gente à l'ellipse en ce point fait avec les tangentes correspondant aux cercles principaux. Je désignerai cet angle par la lettre δ.

Je rappelle en outre que l'angle M'Ox ou φ porte le nom d'*anomalie excentrique* de l'ellipse au point M.

2. Les cercles γ' et γ'' étant connus, tout point M de l'ellipse est évidemment déterminé par la connaissance seule de son anomalie excentrique φ. Voyons comment la déviation δ est donnée en fonction de φ.

On a

$$\delta = \widehat{M'T'O} - \widehat{MT'O}.$$

Or

$$\tang \widehat{M'T'O} = \cot\varphi,$$

$$\tang \widehat{MT'O} = \frac{b}{a}\cot\varphi.$$

Donc

$$\tang\delta = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\cot\varphi}{1 - \frac{b}{a}\cot^2\varphi}$$

ou

$$(1) \qquad \tang\delta = \frac{(a-b)\sin\varphi\cos\varphi}{a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi}.$$

Lorsque l'angle φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le point M décrit le quart d'ellipse AB, l'angle δ part de zéro, croît jusqu'à un certain maximum et décroît ensuite jusqu'à zéro.

Nous appellerons le point M_1 où la déviation δ atteint son maximum δ_1 un *point de déviation maxima*. Il y a évidemment quatre points de déviation maxima symétriques deux à deux, soit par rapport aux axes, soit par rapport au centre.

Pour obtenir la déviation maxima δ_1, annulons la dérivée de l'expression (1) ; cela nous donne, en appelant φ_1 l'anomalie excentrique correspondante,

$$\begin{aligned}(a\sin^2\varphi_1 + b\cos^2\varphi_1)(-\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)\\ -\sin\varphi_1\cos\varphi_1(2a\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - 2b\sin\varphi_1\cos\varphi_1) = 0,\end{aligned}$$

ou, toutes réductions faites,

$$-a\sin^2\varphi_1 + b\cos^2\varphi_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\tag{2} \operatorname{tang}\varphi_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

La tangente de l'anomalie excentrique du point de déviation maxima situé sur le premier quart de l'ellipse est égale à la racine carrée du rapport des demi-axes.

Il est facile de construire le point M_1. En effet, il suffit, pour cela, de connaître la position correspondante $OM''_1M'_1$ de la droite $OM''M'$. Or cette droite fait avec Ox l'angle φ_1, et l'on a

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{b}{\sqrt{ab}}.$$

Donc, si l'on porte sur OB' la longueur $OA_1 = OA$ (¹), et que le cercle décrit sur BA_1 comme diamètre coupe OA au point C, la droite $OM''_1M'_1$ passe par le milieu de BC. On déduit de là le point M_1 et, par symétrie relativement aux axes et au centre, les trois autres points de déviation maxima.

Portant la valeur de φ_1, tirée de (2), dans (1), on en déduit, pour la déviation maxima δ_1,

$$\tag{3} \operatorname{tang}\delta_1 = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

De cette formule on déduit immédiatement les suivantes :

$$(3') \qquad \cos\delta_1 = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}:$$

le cosinus de la déviation maxima est égal au rapport de la moyenne géométrique des demi-axes à leur moyenne arithmétique; et

$$(3'') \qquad \sin\delta_1 = \frac{a-b}{a+b}:$$

le sinus de la déviation maxima est égal au rapport de la différence des demi-axes à leur somme.

3. Les coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 sont bien faciles à calculer. On a, en effet,

$$x_1 = a\cos\varphi_1,$$
$$y_1 = b\sin\varphi_1.$$

Or la formule (2) donne

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},$$
$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Donc

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1^2 &= \frac{a^3}{a+b}, \\ y_1^2 &= \frac{b^3}{a+b}. \end{aligned} \right.$$

Une première conséquence des formules (4), c'est que *les points de déviation maxima se trouvent à la rencontre de l'ellipse donnée et du cercle* Δ *dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2.$$

Sur le demi-axe $OA = a$, portons les segments OH et AK tous deux égaux à b [1], le premier dans le sens de O vers A, le second dans le sens de A vers O, et décrivons des cercles sur AH et AK comme diamètres. *Le cercle* Δ *passe par les points diamétralement opposés aux points de contact des tangentes issues de* O *dans les cercles* AH *et* AK. *Cela résulte de ce que l'on a*

$$a^2 - ab + b^2 = ab + (a - b)^2$$

et

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)a + b^2.$$

4. La tangente à l'ellipse E au point M_1 coupe Ox en T'_1 et Oy en T''_1 [1]. Posons $OT'_1 = \alpha_1$ et $OT''_1 = \beta_1$. Nous avons

$$\alpha_1 = \frac{a^2}{x_1} = \frac{a^2\sqrt{a+b}}{a\sqrt{a}},$$

Donc

$$\alpha_1^2 = a(a+b); \tag{5}$$

de même,

$$\beta_1^2 = b(a+b). \tag{5'}$$

Des formules (6) et (6′) nous tirons d'abord

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{b}{a}.$$

Comparant avec la formule (2), nous voyons que

$$\widehat{T''_1 T'_1 O} = \varphi_1.$$

Par suite, la tangente $T'_1 T''_1$ est parallèle à la droite BC construite précédemment.

Les formules (5) et (5′) nous donnent encore

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = (a+b)^2$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

ou

$$T'_1 T''_1 = a + b.$$

D'ailleurs,

$$\frac{T'_1 M_1}{T'_1 T''_1} = \frac{y_1}{\beta_1} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \frac{1}{\sqrt{b(a+b)}} = \frac{b}{a+b}.$$

Donc

$$T'_1 M_1 = T'_1 T''_1 \frac{b}{a+b} = (a+b)\frac{b}{a+b} = b$$

et, par suite,

$$T''_1 M_1 = a.$$

Le segment de la tangente en un point de déviation maxima, compris entre ce point et l'un des axes, est égal à la moitié de l'autre axe.

Ce résultat peut être présenté sous une autre forme que voici :

Si une droite de longueur constante glisse entre deux axes rectangulaires, tout point de cette droite décrit une ellipse. Les points de déviation maxima sur l'une quelconque de ces ellipses sont donnés par les points où la droite mobile devient tangente à cette ellipse.

On peut encore, en remarquant que l'enveloppe de la droite de longueur constante est une hypocycloïde à quatre rebroussements, dire que :

Si l'on considère une série d'ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites, et telles que la somme des longueurs de leurs axes soit constante, toutes ces ellipses sont tangentes à une hypocycloïde à quatre rebroussements qu'elles touchent par leurs points de déviation maxima.

Les formules (5) et (5') nous donnent aussi

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = a^2 - b^2.$$

Cette relation exprime que *l'ellipse ayant pour demi-axes* OT_1 *et* OT'_1 *est homofocale à l'ellipse* E.

De là ce théorème :

L'ellipse homofocale à une ellipse donnée, et qui est inscrite dans le losange dont les sommets sont les sommets de cette ellipse, touche les côtés de ce losange par ses points de déviation maxima.

Enfin on peut remarquer qu'il résulte des formules (5) et (5′) que

$$\alpha_1 \beta_1 = (a + b)\sqrt{ab}$$

ou

$$2\alpha_1 \beta_1 = \frac{2a + 2b}{2} \sqrt{2a.2b}.$$

La surface du losange formé par les tangentes menées à une ellipse par ses points de déviation maxima est égale au produit de la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique des axes de cette ellipse.

5. La longueur du rayon de courbure en un point de l'ellipse E est donnée, abstraction faite du signe, par la formule

$$\rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Si, dans cette formule, nous substituons les valeurs (4) des coordonnées du point de déviation maxima M_1, nous obtenons, après une réduction facile, pour le rayon de courbure ρ_1 en ce point, la valeur

$$\rho_1 = \sqrt{ab}. \tag{6}$$

Le rayon de courbure en un point de déviation maxima d'une ellipse est égal à la moyenne géométrique des demi-axes de cette ellipse.

C'est une assez remarquable propriété.

Observant que les rayons de courbure aux sommets de l'ellipse ont respectivement pour valeurs $\frac{a^2}{b}$ et $\frac{b^2}{a}$, on peut encore dire que *le rayon de courbure en un point de déviation maxima est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure en un sommet du grand axe et en un sommet du petit axe.*

La formule précédente montre également que *la surface du cercle osculateur en un point de déviation maxima d'une ellipse est égale à la surface de cette ellipse.*

Nous avons vu (n° 4) que, si la tangente au point de déviation maxima M_1 coupe Ox en T'_1 et Oy en T''_1, on a $M_1T'_1 = b$, $M_1T''_1 = a$. Rapprochant cette propriété de la formule précédente, on en déduit que :

Le cercle qui a pour diamètre le segment, compris entre les axes, de la tangente en un point de déviation maxima, passe par le centre de courbure répondant à ce point.

Menons par le point M_1 (¹) une droite telle que les bissectrices des angles qu'elle forme avec la tangente $T'_1T''_1$ soient parallèles aux axes. Cette droite coupe l'axe Ox en S'_1, l'axe Oy en S''_1, et l'on a

$$M_1S'_1 = M_1T'_1 = b,$$
$$M_1S''_1 = M_1T''_1 = a.$$

D'ailleurs, l'angle $M_1S'_1x$, égal à $M_1T'_1O$, est égal à φ_1; par conséquent, $M_1S'_1$ est perpendiculaire à la direction des tangentes correspondant aux cercles principaux, et fait un angle égal à δ_1 avec la normale à l'ellipse en M_1.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Or le rapprochement des formules (3′) et (6) montre que

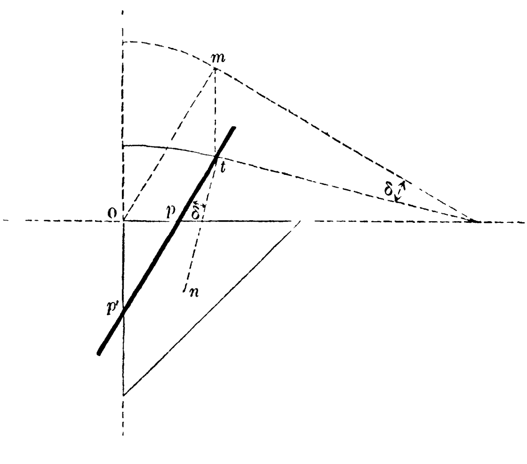
$$\rho_1 = \frac{a+b}{2}\cos\delta_1.$$

Donc *le centre de courbure répondant au point* M_1 *est le pied de la perpendiculaire abaissée du milieu de* $S'_1 S''_1$ *sur la normale correspondante.*

6. Voici une application pratique de la théorie précédente.

On construit un compas elliptique composé d'une réglette munie de deux pointes p et p' avec lesquelles on

Fig. 2.



suit les bords d'une équerre, et d'un tire-ligne t dont les becs s'écartent dans le sens de l'axe de la réglette. Il est évident que ce tire-ligne ne fournira point un trait d'épaisseur uniforme. On peut se proposer d'étudier comment varie l'épaisseur de ce trait. A cet effet, menons par le point O la droite Om parallèle et égale à $p't$; le point m décrit le cercle principal de l'ellipse que décrit le point t. On voit donc que l'angle du compas $p't$ et de la normale tn à l'ellipse tracée est précisément égal à la déviation δ de cette ellipse au point considéré. Or il est aisé de voir que l'épaisseur ε du trait est, en chaque point, *sensiblement* égale à la projection de l'écartement e des becs du tire-ligne sur la normale correspondante ; par suite,

$$\varepsilon = e \cos \delta,$$

et le minimum de l'épaisseur du trait est donné par

$$\varepsilon_1 = e \, \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

Par exemple, pour $a = 1,5$, $b = 1$ (ellipse surbaissée au $\frac{1}{3}$), on a

$$\varepsilon_1 = e \times 0,979794\ldots.$$

Pour $a = 2$, $b = 1$ (ellipse surbaissée au $\frac{1}{4}$),

$$\varepsilon_1 = e \times 0,942809\ldots.$$