J.-B. Pomey

Sur la limite de $\sum_1^n \frac{1}{p} - \sum_1^m \frac{1}{q}$, lorsque p et q parcourent toutes les valeurs entières positives jusqu'à n et m respectivement, et que n et m augmentent indéfiniment, tandis que leur rapport tend vers une limite déterminée

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 348-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__348_0>

SUR LA LIMITE DE $\sum_1^n \frac{1}{p} - \sum_1^m \frac{1}{q}$, LORSQUE p ET q PARCOURENT TOUTES LES VALEURS ENTIÈRES POSITIVES JUSQU'A n ET m RESPECTIVEMENT, ET QUE n ET m AUGMENTENT INDÉFINIMENT, TANDIS QUE LEUR RAPPORT TEND VERS UNE LIMITE DÉTERMINÉE;

PAR M. J.-B. POMEY.

Je considère la série harmonique

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots.$$

Soient S_m la somme de ses m premiers et S_n la somme de ses n premiers termes. Je suppose que m et n tendent vers l'infini, n restant supérieur à m, et le rapport $\frac{n}{m}$ restant fini. Alors on a

$$\lim(S_n - S_m) = \log\left(\frac{n}{m}\right),$$

en mettant $\left(\frac{n}{m}\right)$ pour $\lim \frac{n}{m}$.

On peut le démontrer ainsi : $S_n - S_m$ est la limite de

$$\frac{1}{(n+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\rho}} + \ldots + \frac{1}{m^{1+\rho}},$$

pour $\rho = 0$. Supposons ρ positif; la série $\sum \frac{1}{i^{1+\rho}}$, i parcourant toutes les valeurs entières positives, est convergente, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}S_n - S_m = \lim &\left[\frac{1}{(n+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\rho}} + \ldots\right] \\ - \lim &\left[\frac{1}{(m+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(m+2)^{1+\rho}} + \ldots\right].\end{aligned}$$

Je vais calculer chacune de ces limites.

Soit $y = \frac{1}{x^{1+\rho}}$ une courbe rapportée à deux axes rectangulaires. J'ai

$$\int_i^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{\rho\, i^\rho}.$$

Or la valeur de cette intégrale est représentée par l'aire comprise, du côté des x positifs, entre l'axe des x, la courbe et l'ordonnée $x = i$.

Considérons les rectangles qui ont pour côtés respectivement les ordonnées des points dont les abscisses sont $x = i, i+1, \ldots$, et les distances égales à 1 qui séparent ces ordonnées.

Il suffit de faire la figure pour voir clairement que l'aire de ces rectangles sera au total supérieure à l'aire $\int_i^\infty y\,dx$. La somme des aires de ces rectangles est

$$\frac{1}{i^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} + \ldots.$$

Si nous considérons de même les rectangles qui ont pour côtés les ordonnées des points dont les abscisses sont $i+1$, $i+2$, $\ldots$, et les distances égales à 1 qui séparent les ordonnées $x = i+1$ et $x = i$, $x = i+2$ et $x = i+1$, $\ldots$, la somme des aires de ces rectangles sera égale à

$$\frac{1}{(i+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(i+2)^{1+\rho}} + \ldots,$$

et sera inférieure à la même aire $\int_i^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{\rho\, i^\rho}$.

Donc $\int_i^\infty y\,dx$ sera compris entre les aires des deux séries de rectangles, et l'on peut poser

$$\frac{1}{(i+1)^{1+\rho}}+\frac{1}{(i+2)^{1+\rho}}+\ldots=\frac{1}{\rho\, i^\rho}-\theta\frac{1}{i^{1+\rho}},$$

θ étant compris entre o et 1.

Il en résulte que, θ_1 étant de même compris entre o et 1, on aura

$$\begin{aligned}S_n-S_m=\Bigg[&\lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho\, m^\rho}-\frac{1}{\rho\, n^\rho}\right)\\&-\theta_1\lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{n^{1+\rho}}\right)\Bigg],\end{aligned}$$

m et n étant infinis.

Je passe à la limite pour $\rho=0$ et j'ai à trouver la limite de

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{m}\right)^\rho-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{n}\right)^\rho.$$

Nous aurons le résultat en considérant le rapport des dérivées en ρ, il reste

$$\left(\frac{1}{m}\right)^\rho\log\frac{1}{m}-\left(\frac{1}{n}\right)^\rho\log\frac{1}{n}.$$

Donc, pour $\rho=0$, il reste

$$S_n-S_m=\lim_{\substack{n=\infty\\ m=\infty}}\left[\log\left(\frac{n}{m}\right)-\theta_1\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\right]=\log\left(\frac{n}{m}\right).$$

C. Q. F. D.

Autre démonstration. — Si l'on considère $\int_m^n\frac{dx}{x}$, c'est l'aire comprise entre l'axe des x, les ordonnées $x=m$, $x=n$ et la courbe $y=\frac{1}{x}$. En considérant deux séries de rectangles (qu'on pourrait peut-être appeler inscrits et circonscrits), on obtient

$$\lim\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\int_m^n\frac{dx}{x}$$

(m et n étant infinis).

Ce procédé revient à faire $\rho=0$ dès l'abord dans la démonstration précédente. Seulement on doit considérer $\int_m^n\frac{dx}{x}$ au lieu de $\int_m^\infty\frac{dx}{x}-\int_n^\infty\frac{dx}{x}$, car $\int_m^\infty\frac{dx}{x}$ est infini.

Or $\int_m^n\frac{dx}{x}$ ne dépend que de $\frac{n}{m}$; car, posant $x=mx'$, j'ai

$$\int_m^n\frac{dx}{x}=\int_1^{\frac{n}{m}}\frac{dx'}{x'}.$$

Si $\frac{n}{m}$ reste fini, la somme considérée a une limite. Or, en posant

$$\begin{aligned}f_{\frac{n}{m}}&=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n}\\&=\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

on a

$$f_{\frac{n}{m}}=f_{\frac{p}{m}}+f_{\frac{n}{p}}.$$

Posant $\lim\frac{n}{m}=xy$, $\lim\frac{p}{m}=x$, il vient

$$\lim\frac{n}{p}=y$$

et, par suite,

$$f_{xy}=f_x+f_y;$$

de sorte que l'on voit que la limite de la fonction

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n},$$

où n et m augmentent indéfiniment, $\frac{n}{m}$ tendant vers une limite déterminée, est égale à

$$\lim \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{-\rho}}{\rho}. \qquad \text{pour } \rho = 0,$$

à $\int_1^{\frac{n}{m}} \frac{dx}{x}$, et jouit de la propriété caractéristique des logarithmes

$$fxy = fx + fy.$$