NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème sur les courbes algébriques et le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 295-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__295_0>

THÉORÈME SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES ET LE CERCLE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

THÉORÈME. — *Le centre de gravité des points d'intersection d'une courbe algébrique de degré quelconque donnée, et d'un cercle de centre fixe, et de rayon variable, est un point fixe.*

Prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires menées par le centre fixe O du cercle variable. L'équation de ce cercle sera

$$x^2+y^2=R^2, \tag{1}$$

R étant un paramètre variable; celle de la courbe algébrique pourra s'écrire

$$\sum_{i=0}^{i=n} y^i X_{n-i} = 0, \tag{2}$$

X_{n-i} désignant, d'une manière générale, un polynôme du degré $n-i$ en x

$$X_{n-i} = a_{n-i}x^{n-i} + b_{n-i}x^{n-i-1} + c_{n-i}x^{n-i-2} + \ldots + l_{n-i}.$$

La démonstration du théorème exige que l'on mette en évidence la parité de n. Elle se fait, d'ailleurs, absolument de même dans l'un et l'autre cas. Pour fixer les idées, nous supposerons n pair, $n=2p$.

L'équation (2) pourra alors s'écrire, en faisant passer tous les termes à puissances impaires en y, dans le second membre,

$$\sum_{i=0}^{i=p} y^{2i} X_{2(p-i)} = -\sum_{i=0}^{i=p-1} y^{2i+1} X_{2(p-i)-1}.$$

Élevant les deux membres de cette équation au carré, nous avons

$$\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p} y^{2(i+j)} X_{2(p-i)} X_{2(p-j)}$$
$$= \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1} y^{2(i+j+1)} X_{2(p-i)-1} X_{2(p-j)-1}.$$

Éliminant y^2 entre cette équation et l'équation (1), on a

$$\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p} (R^2 - x^2)^{i+j} X_{2(p-i)} X_{2(p-j)}$$
$$= \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1} (R^2 - x^2)^{i+j+1} X_{2(p-i)-1} X_{2(p-j)-1},$$

équation aux abscisses des points d'intersection du cercle et de la courbe algébrique donnée. Calculant les coefficients des deux termes du degré le plus élevé, on trouve

$$x^{4p}\left[\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p}(-1)^{i+j} a_{2(p-i)} a_{2(p-j)} + \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1}(-1)^{i+j} a_{2(p-i)-1} a_{2(p-j)-1}\right]$$
$$+ x^{4p-1}\left\{\sum_{i=0}^{i=p}\sum_{j=0}^{j=p}(-1)^{i+j}\left[a_{2(p-i)} b_{2(p-j)} + a_{2(p-j)} b_{2(p-i)}\right] + \sum_{i=0}^{i=p-1}\sum_{j=0}^{j=p-1}(-1)^{i+j}\left[a_{2(p-i)-1} b_{2(p-j)-1} + a_{2(p-j)-1} b_{2(p-i)-1}\right]\right\} + \ldots = 0.$$

Les coefficients de ces termes sont indépendants du paramètre variable R; on verrait de même qu'il en est ainsi pour l'équation en y : le théorème est donc démontré.

Transformant ce théorème par polaires réciproques, en prenant pour conique directrice un cercle concentrique au cercle de rayon variable, on a ce théorème corrélatif :

La polaire d'un point par rapport aux tangentes communes à un cercle de rayon variable, ayant ce point pour centre, et à une courbe algébrique de degré quelconque, donnée, est une droite fixe.

La transformation par rayons vecteurs réciproques donne cet autre théorème :

Le centre harmonique, relativement à un point, des points d'intersection d'un cercle de rayon variable ayant ce point pour centre et d'une courbe algébrique, de degré quelconque, donnée, est un point fixe.

Le théorème qui vient d'être démontré est particulièrement intéressant dans le cas des coniques.

Si l'on rapporte une conique à centre à ses axes Ox et Oy,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et qu'on coupe cette conique par un cercle de centre ω,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

on a, pour l'équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux courbes,

$$(a^2-b^2)^2x^4 - 4\alpha a^2(a^2-b^2)x^3 + \ldots = 0.$$

Si donc (X, Y) est le centre de gravité G de ces points d'intersection, on a

$$(3) \qquad X = \frac{\alpha a^2}{c^2}.$$

On trouverait de même

$$(4) \qquad Y = -\frac{\beta b^2}{c^2}.$$

Si l'on rapproche ces formules de celles qui ont été données, dans les *Nouvelles Annales,* même tome, p. 159, par M. R. Godefroy, on voit que, si (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont les centres des systèmes de cordes communes au cercle et à la conique, on a

$$x_1 x_2 x_3 = a^2 \mathrm{X}, \qquad y_1 y_2 y_3 = b^2 \mathrm{Y}.$$

Des formules (3) et (4) on déduit les suivantes :

$$\frac{\mathrm{X}}{\alpha} + \frac{\mathrm{Y}}{\beta} = 1,$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\beta}{\alpha},$$

qui montrent que *le point* G *est à la rencontre de la droite qui joint les projections du centre* ω *du cercle, sur les axes* Ox *et* Oy *de la conique, et du diamètre conjugué, dans cette conique, de la symétrique de la droite* $O\omega$ *par rapport à la bissectrice de l'angle* xOy.

Le théorème précédent est susceptible de diverses applications :

Veut-on, par exemple, connaître le point P où la conique est rencontrée par le cercle osculateur en un de ses points que nous appellerons M? Soit ω le centre de courbure répondant au point M. Du point ω nous déduisons, par le moyen qui vient d'être indiqué, le point G. Le point P se trouve sur la droite MG, prolongée du côté du point G, de la longueur GP $=$ 3MG.

Nous nous bornerons là. Le lecteur apercevra facilement d'autres applications du théorème énoncé dans cette Note.