NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FRITZ HOFMANN

Une application élémentaire du théorème d'Abel

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 279-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__279_1>

UNE APPLICATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME D'ABEL;

PAR M. FRITZ HOFMANN.

PROBLÈME. — *Construire la formule pour* cos(A + B) *par la méthode d'Abel.*

I. Envisageons l'équation

$$(x+a)\sqrt{x} - b\sqrt{1-x} = 0 \tag{1}$$

ou

$$(x+a)^2 x - b^2(1-x) = 0 = f(x). \tag{2}$$

Les trois racines x_1, x_2, x_3 de l'équation (2) dépendent des valeurs des constantes a et b (tandis que réciproquement ces constantes a, b sont déterminées par les valeurs de deux de ces racines).

Supposons des valeurs quelconques attribuées à ces constantes a, b, alors l'équation (2) nous fournirait aussi trois expressions analytiques pour les racines x_1, x_2, x_3. Nous ne formerons pas ces expressions ; leur existence nous assure, premièrement, que, pour des variations infiniment petites de a et b, les racines x_1, x_2, x_3 varient aussi infiniment peu, et deuxièmement qu'il est possible de tenir séparées l'une de l'autre ces trois racines de l'équation (2) pendant un mouvement continu des valeurs de a et b.

L'équation (1) permet les transformations

$$(x+a)x = b\sqrt{x-x^2}, \tag{3}$$

$$(x+a)\sqrt{x-x^2} = b(1-x) \tag{4}$$

que nous allons employer tout de suite.

D'après ce que nous avons établi, il est permis de différentier par rapport à a, b, x l'équation (2)

$$f(x) = (x+a)^2 x - b^2(1-x) = 0 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

où x est employé pour marquer une des trois racines x_1, x_2, x_3. Nous trouvons

$$f'(x)dx + 2[(x+a)x\,da - b(1-x)db] = 0.$$

En substituant les expressions (3) et (4), on a

$$f'(x)dx = 2\left[(x+a)\sqrt{x-x^2}\,db - b\sqrt{x-x^2}\,da\right]$$

ou

$$(5)\qquad \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2\,\frac{(x-a)\,db - b\,da}{f'(x)}.$$

En substituant les trois racines x_1, x_2, x_3 et en ajoutant, on en tire

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_3}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \\ &\quad = 2\int\sum\frac{(x+a)\,db - b\,da}{f'(x)}, \end{aligned}\right.$$

où le signe $\sum$ se rapporte aux trois différentes racines x_1, x_2, x_3, et où les limites de l'intégrale à droite se déterminent par la position initiale et finale des valeurs a et b.

L'expression $\sum\frac{(x+a)\,db - b\,da}{f'(x)}$ s'évanouit identiquement. Pour voir cela, rappelons la formule connue

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= \frac{\varphi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\varphi(x_1)}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{(x-x_2)f'(x_2)} + \frac{\varphi(x_3)}{(x-x_3)f'(x_3)}, \end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{(x-a)\,db - b\,da}{f(x)} &= \frac{(x_1-a)\,db - b\,da}{(x-x_1)f'(x_1)} \\ &\quad + \frac{(x_2+a)\,db - b\,da}{(x-x_2)f'(x_2)} + \frac{(x_3-a)\,db - b\,da}{(x-x_3)f'(x_3)}. \end{aligned}$$

En multipliant, on en tire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} (x+a)\,db - b\,da &= \frac{(x_1+a)\,db - b\,da}{f'(x_1)}(x-x_2)(x-x_3) \\ &\quad + \frac{(x_2+a)\,db - b\,da}{f'(x_2)}(x-x_1)(x-x_3) \\ &\quad + \frac{(x_3-a)\,db - b\,da}{f'(x_3)}(x-x_1)(x-x_2), \end{aligned}\right.$$

ce qui est une identité.

A droite de (7), le coefficient de x^2 est justement la somme $\sum \dfrac{(x+a)\,db - b\,da}{f'(x)}$, et il faut bien qu'elle s'évanouisse, puisqu'il n'y a pas de deuxième puissance de x à gauche.

Donc l'équation (6) nous donne d'abord

$$(8)\qquad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \mathrm{C}.$$

Il s'agit maintenant d'établir la dépendance des trois racines x_1, x_2, x_3 entre elles. Étant données x_1 et x_2, on les substituera dans (1) pour obtenir les valeurs de a et b en fonction de x_1 et x_2,

$$(9)\qquad \begin{cases} (x_1 + a)\sqrt{x_1} - b\sqrt{1 - x_1} = 0, \\ (x_2 + a)\sqrt{x_2} - b\sqrt{1 - x_2} = 0. \end{cases}$$

En éliminant a, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(10)\qquad b = -\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\left(\sqrt{x_1}\sqrt{1 - x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1 + x_1}\right).$$

Mais, par l'équation (2), on apprend que le produit des trois racines x_1, x_2, x_3 est égal à b^2 ; donc

$$(11)\qquad x_3 = \left(\sqrt{x_1}\sqrt{1 - x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1 - x_1}\right)^2.$$

On en conclut que $x_3 = 0$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; donc $\mathrm{C} = 0$ dans l'équation (8). Elle se transforme en

$$(12)\qquad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x - x_2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = 0.$$

Nous voilà à même de formuler le théorème suivant :

Quand il existe entre les trois valeurs x_1, x_2, x_3 *la relation* (12), *on a en même temps*

$$x_3 = \left(\sqrt{x_1}\sqrt{1 \quad x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1 - x_1}\right)^2.$$

II. Faisons la substitution $x = \frac{1+z}{2}$; alors les réductions nécessaires faites, le même théorème s'énonce comme il suit :

Étant donné

$$(13)\qquad \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\int_0^{z_3} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

on a en même temps

$$\frac{1+z_3}{2} = \frac{1}{4}\left[2 - 2z_1 z_2 + 2\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\right]$$

ou

$$(14)\qquad z_3 = \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - z_1 z_2.$$

Mais les équations (13) et (14) contiennent la solution du problème proposé.

Posons

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathrm{A},$$

$$\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathrm{B},$$

$$-\int_0^{z_3} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathrm{C}';$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C}'.$$

On a

$$z_1 = \sin \mathrm{A}, \qquad z_2 = \sin \mathrm{B}, \qquad z_3 = \cos \mathrm{C}' = \cos(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

L'équation (14) nous dit que

$$z_1 = \cos(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} - \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$